Larissa Hammerstein

Repetitorium Analysis II für Physiker

Tag 4

VEKTORANALYSIS UND FOURIER-TRANSFORMATION

1 Vektoranalysis

Definition 1.1 *Skalarfeld*

Jede skalare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Skalarfeld.
Anwendung: z.B. Temperaturverteilung, Druckverteilung
Die Flächen oder Linien mit $f(x) = const$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißen Niveauflächen bzw. Niveaulinien (z.B. Isotherme, Isobare, Höhenlinien). Die Funktion ändert sich umso schneller, je dichter die Niveauflächen liegen.

Definition 1.2 *Nabla-Operator*

Der Nabla-Operator ist ein Differentialoperator und wird mit ∇ bezeichnet. Als n-Vektor aufgefasst ist

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definition 1.3 *Gradient*

Der Gradient eines Skalarfeldes φ ist definiert als der Vektor der partiellen Ableitungen. Er existiert deshalb nur an den Stellen, an denen φ bezüglich allen Koordinaten partiell differenzierbar ist. Der Gradient wird mit $\operatorname{grad}\varphi$ oder $\nabla\varphi$ bezeichnet.

Der Gradient im $\mathbb{R}^n$ an der Stelle $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$:

$$\nabla\varphi(\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}e_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}e_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Geometrisch betrachtet ist der Gradient eines Skalarfeldes ein Vektor, der in die Richtung des steilsten Anstieges des Skalarfeldes zeigt. Dabei ist der Betrag des Vektors die Stärke des Anstieges. Befindet man sich an einem lokalen Extremum oder einem Sattelpunkt des Skalarfeldes, so entspricht der Gradient an dieser Stelle dem Nullvektor.

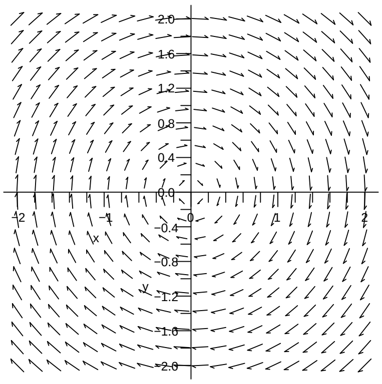
Definition 1.4 *Vektorfeld*

Jede stetige Abbildung $F : A \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Vektorfeld auf A.

Geometrisch deutet man ein Vektorfeld F dadurch, dass an jeden Punkt $x \in A$ der Vektor $F(x)$

angeheftet wird, d.h. man bildet die Paare $(x, F(x))$.
Anwendung: z.B. Strömungsfelder, Kraftfelder, elektrisches Feld, magnetisches Feld

Beispiel: Rotationsfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



Definition 1.5 *Potential, konservative Vektorfelder*

Ein Vektorfeld F auf einer offenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Gradientenfeld oder konservativ, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $U : A \to \mathbb{R}^n$ mit $F = -\operatorname{grad} U$ gibt. Es soll also

$$F(x) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(x)\right)^T$$

für alle $x \in D$ gelten. Jede Funktion U heißt ein Potential des Feldes F.

Satz 1.6

Ein Vektorfeld $F : A \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn das Kurvenintegral $\int_\gamma F \mathrm{d}s$ von F längs γ nur von den Endpunkten von γ abhängt. Für beliebige Punkte $p, q \in A$ und für beliebige stückweise stetig differenzierbaren Kurven γ_1 und γ_2 in A, die beide den Anfangspunkt p und den Endpunkt q haben, muss also die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} F \mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} F \mathrm{d}s$$

gelten. Insbesondere gilt für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve γ in A $\int_\gamma F \,\mathrm{d}\, s = 0$.

Satz 1.7 *Über Konservative Felder*

Es sei $F : A \to \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wählt man einen beliebigen Punkt $p \in A$ und setzt man

$$U(q) = \int_\gamma F \,\mathrm{d}\, s \qquad \text{für } q \in A,$$

wobei γ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve in A von p nach q ist, dann ist U ein Potential von F und für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in A ist das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F \,\mathrm{d}\, s = U(q) - U(p)$$

gleich der Potentialdifferenz zwischen dem Endpunkt q und dem Anfangspunkt p von γ. Je zwei Potentiale von F unterscheiden sich um eine additive Konstante.

Definition 1.8 *Rotation eines Vektorfeldes*

Es sei $n = 3$. Unter der Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $F = (x_1, x_2, x_3)$ auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ versteht man das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \qquad \text{symbolisch } \nabla \times F.$$

Definition 1.9 *Divergenz eines Vektorfeldes*

Die Divergenz eines Vektorfeldes $F : A \to \mathbb{R}^n$ ist ein skalares Feld und wird als $\operatorname{div} F$ oder $\nabla \cdot F$ geschrieben:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Die Divergenz sagt aus, ob und wo das Feld Quellen (Divergenz größer Null) oder Senken (Divergenz kleiner Null) hat. Ist die Divergenz gleich Null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei.

2 Integralsätze der Vektoranalysis

Satz 2.1 *Satz von Stokes*

Sei M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ und ∂M ihr Rand und $F : A \to \mathbb{R}^3,\ A \subseteq \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt:

$$\int\limits_M \operatorname{rot} F \cdot \mathrm{d}\,\sigma = \int\limits_{\partial M} F \,\mathrm{d}\,s$$

Die Zirkulation von F längs ∂M ist gleich dem Fluss der Rotation von F durch M. Der Fluss der Rotation von F durch eine beliebige geschlossene Fläche ist 0.

Satz 2.2 *Satz von Gauß*

Es sei M ein glatt berandeter Bereich in $\mathbb{R}^3$ mit dem Rand ∂M, und F sei ein Vektorfeld der Klasse C^1 auf einer offenen Umgebung D von M. Dann gilt:

$$\int\limits_M \operatorname{div} F \,\mathrm{d}^3\, r = \int\limits_{\partial M} F \,\mathrm{d}\,\sigma$$

Der Fluss von F durch den Rand von M ist gleich dem Integral der Quellstärke von F über M.

3 Fouriertransformation

<u>Motivation:</u> Kann man eine beliebige 2π-periodische Funktion durch Kombination von sin und cos darstellen?

Definition 3.1 *Periode*

Eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt T-periodisch, falls

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definition 3.2 *Fourier-Reihe*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodisch und Riemann-integrierbar. Dann heißen

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}\, x \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Fourier-Koeffizienten der Funktion f. Es gilt $\overline{c_n} = c_{-n}$. Die Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

heißt Fourier-Reihe der Funktion f. Die Fourier-Reihe lässt sich auch in der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_k \sin nx)$$

schreiben, wobei

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}\, x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}\, x$$

Es gilt: $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ für $n \geq 1$.
Achtung: Es ist nicht garantiert, dass die Fourierreihe einer Funktion f konvergiert und dass sie im Falle der Konvergenz gegen f konvergiert.

Definition 3.3 *Basisfunktionen der Fourier-Reihenentwicklung*

Die Basisfunktionen einer Fourier-Reihe sind

$$e_n(x) = e^{inx} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Für diese gilt $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \overline{e_m(x)} e_n(x) \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-imx} e^{inx} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(m-n)} \,\mathrm{d}\, x = \delta_{m,n}$

Satz 3.4 *Besselsche Ungleichung*

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), Riemann-Integrierbar und ihre Fourier-Koeffizienten seien $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2$$

Aus der Besselschen Ungleichung folgt, dass

$$|c_n| \to 0 \qquad \text{für } n \to \pm\infty$$

Satz 3.5 *Konvergenz der Fourier-Reihe*

Ist die Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, d.h. gilt $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, so ist auch die Fourier-Reihe absolut konvergent.
Ist f (stückweise) stetig und stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f und es gilt:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \,\mathrm{d}\, x$$

Satz 3.6

Die Menge der 2π-periodischen und Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

mit den Eigenschaften

- $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\rangle = \lambda_1\langle f_1, g\rangle + \lambda_2\langle f_2, g\rangle$
- $\langle f, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2\rangle = \overline{\mu_1}\langle f, g_1\rangle + \overline{\mu_2}\langle f, g_2$
- $\langle f, f\rangle \geq 0$ für $f \neq 0$ und $\langle f, f\rangle = 0$ für $f = 0$