1 Koordinatentransformation

Bestimmen Sie allgemeine Formeln für die Geschwindigkeit $\dot{r}(t)$ sowie die Beschleunigung $\ddot{r}(t)$ eines Teilchens in Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z.
Drücken Sie zuerst die Position $r(t)$ mit den Einheitsvektoren $e_\rho,\ e_\phi,\ e_z$ aus bevor Sie nach der Zeit ableiten.

Lösung

Mit dem lokalen 3-Bein in Zylinderkoordinaten:

$$e_\rho = \begin{pmatrix} cos\phi \\ sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\phi = \begin{pmatrix} -sin\phi \\ cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erkennt man sofort dass:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\, cos\phi \\ \rho\, sin\phi \\ z \end{pmatrix} = \rho\, e_\rho + z\, e_z$$

Die Ableitung davon ist:

$$\dot{r} = \dot{\rho}\, e_\rho + \rho\, \dot{e}_\rho + \dot{z}\, e_z + z\, \dot{e}_z$$

Berechne $\dot{e}_\rho$und $\dot{e}_z$ $(\xi = (\rho, \phi, z))$:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\rho &= (\nabla_\xi e_\rho)(\frac{d}{dt}\xi) = (\partial_\rho e_\rho)(\partial_t \rho) + (\partial_\phi e_\rho)(\partial_t \phi) + (\partial_z e_\rho)(\partial_t z) = e_\phi \dot{\phi} \\
\dot{e}_\phi &= -e_\rho \dot{\phi} \\
\dot{e}_z &= 0
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\dot{r} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\phi} e_\phi + \dot{z} e_z$$

Und damit auch:

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \ddot{\rho} e_\rho + \dot{\rho} \dot{e}_\rho + \frac{d(\rho\dot{\phi})}{dt} e_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{e}_\phi + \ddot{z} e_z + \dot{z}\dot{e}_z \\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) e_\rho + (z\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) e_\phi + \ddot{z} e_z
\end{aligned}$$

2 Integration

2.1 Wegintegrale von Vektorfeldern

2.1.1 Aufgabe

Berechnen Sie folgende Wegintegrale

a) $f(x,y) = (y,x) \qquad \gamma(t) = (t,t^2) \quad t \in [0,1]$
b) $f(x,y) = (x^2,y^2) \qquad \gamma(t) = (2t,4t) \quad t \in [0,1]$
c) $f(x,y) = (e^x,e^y) \qquad \gamma(t) = (t,t^2) \quad t \in [0,1]$
d) $f(x,y,z) = (x^2+5y+3xy, \quad 5x+3xy-2, \quad 3xy-4z) \qquad \gamma(t) = (-sin(t), cos(t), 0) \quad t \in [0,2\pi]$

Lösung

a) $= \int_\gamma \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = 1$
b) $= 72 \int_0^1 t^2 dt = 24$
c) $\int_\gamma \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_0^1 (e^t + 2te^{t^2})dt = 2(e-1)$
d) Es gilt: $\partial_t \gamma = \begin{pmatrix} cos(t) \\ -sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$. Setze dies ein:

$$\int_\gamma ..... = \int_0^{2\pi} (sin^2 t\, cos\, t + 5cos^2 t) - (5sin^2 t + 3t\, sin^2 t - 2sin\, t) + (3sin\, t\, cos\, t - 4t)\, dt$$

Die Terme $5cos^2 t$ und $5sin^2 t$ heben sich weg. Der Term mit sin ergibt 0. Die Terme mit $sin^2 cos$ bzw. $cos^2 sin$ ergeben nach dem integrieren 0. Der Term mit $t\, sin^2(t)$ lässt sich mit der Identität $sin^2 = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$ umwandel. Wobei der Termn mit $cos(2x)$ auch 0 ergibt. Es bleibt also:

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{11}{2} t = -11\pi^2$$

2.1.2 Aufgabe

Sei $G \subseteq R^n$ offen und zusammenhängend und $v \in C^1(G,R)$. Zeigen Sie, dass man die Funktion $v$aus ihrem Gradienten und einem Anfangswert $v(x_0)$ rekonstruieren kann.

$$v(x) = v(x_0) + \int_\gamma grad\, v(y)\; dy$$

Dabei bezeichne γeine stückweise stetig differenzierbare und ganz in G verlaufende Kurve mit Anfangspunkt $x_0 \in G$ und Endpunkt $x \in G$

Lösung

$$\int_\gamma grad\, v(y)\; dy = \int_{t_0}^t grad\, v(\gamma()s) \quad \dot\gamma(s) \quad ds = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} v(\gamma(s)) \quad ds = v(\gamma(t)) - v(\gamma(t_0)) = v(x) - v(x_0)$$

Nun setze den Weg stückweise zusammen.

2.2 Oberflächenintegrale von Skalarfeldern

2.2.1 Aufgabe

Berechnen Sie das Integral der Funktion $f: R^3 \to R, \quad f(x,y,z) = z$ über die Hälfte $z \geq 0$ einer Vollkugel vom Radius $R > 0$

Lösung
Verwende Kugelkoordinaten:

$$= \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; r^3 sin(\theta) cos(\theta) = 2\pi \frac{R^4}{4} [\frac{1}{2} sin^2(\theta)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} R^4$$

2.3 Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

2.3.1 Aufgabe

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $f: R^3 \to R^3$

$$f(x,y,z) = (0,0,z)$$

durch die obere Hälfte S^+der Kugeloberfläche

$$S^+ = \{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

Lösung
Verwende Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sin\theta cos\phi \\ sin\theta sin\phi \\ cos\theta \end{pmatrix} sin\theta \, d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} cos^2\theta sin\theta = 2\pi[-\frac{1}{3} cos^2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Noch schneller gehts mit dem Satz von Gauss

2.3.2 Aufgabe

Integrieren Sie folgendes Vektorfeld über die Oberfläche der im Ursprung des R^3 zentrierten Kugel vom Radius $R > 0$:

$$A(x) = g(|x|) \frac{x}{|x|} \qquad A: R^3 \to R^3$$

Finden sie ein Potential $\Phi: R^3 \to R \quad A = -\nabla\Phi$ zu dem das Vektorfeld gehört.

Lösung
Verwende Kugelkoordinaten und erkenne sofort: $|x| = r$ sowie $\frac{x}{|x|} = e_r$. Damit erhällt man sofort:

$$\int A(x)dx = 4\pi R^2 g(R)$$

Das zugehörige Potential lautet:

$$\Phi(x) = -\int_0^r g(r)dt$$

2.3.3 Aufgabe

Integrieren Sie das Vektorfeld:

$$B(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$$

über die Oberfläche des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a, b, c > 0$$

Lösung
Da $div\, B = 1$ ist folgt sofort mit dem Satz von Gauss:

$$\int_{\partial E} B\, dF = \int_E div\, B\ d^3x = \frac{4\pi}{3} abc$$

2.3.4 Aufgabe

Integrieren Sie die folgenden Vektorfelder über die Oberfläche der im Ursprung des R^3zentrierten Kugel vom Radius 1

$$A(x, y, z) = (1 - x^2, 0, 2x^2 z - x)$$

$$B(x, y, z) = (x + z, -y - z, x + y)$$

Lösung
a) Satz von Gauss

$$div\, A = 2(x^2 - x)$$

Verwende Kugelkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} A\, dF &= \int_{B_1(0)} div\, A\, d^3x = 2\int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi(r^4 sin^3\theta cos^2\phi - r^3 sin^2\theta cos\phi) \\
&= 2\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \left[-\frac{1}{3}cos\theta\; sin^2\theta - \frac{2}{3}cos\theta\right]_0^\pi \left[\frac{1}{2}(\phi + sin\phi cos\phi)\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\pi = \frac{8}{15}\pi
\end{aligned}
$$

b) Verwende Satz von Gauss: $div\, B = 0$. Deshalb verschwindet auch das Integral.

2.4 Volumenintegrale von Skalarfeldern

2.4.1 Aufgabe

Berechnen Sie den Flächeinhalt einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$.

Lösung

Verwende verallgemeinterte Polarkoordinaten $x = \begin{pmatrix} a\, r\, cos\phi \\ b\, r\, cos\phi \end{pmatrix}$.

Damit ist die Funktionaldeterminante:$det\; D\Phi = abr$

Und damit folgt:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} abr\; d\phi\, dr = \pi R^2 ab$$

2.4.2 Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$J_1 = \int_\Lambda (x^6y^2 - x^7y^3)dxdy$$

$$J_2 = \int_\Lambda (x^6y^2 - x^7y^3)dydx$$

mit $\Lambda = [0,1] \times [0,1]$. Begründen Sie das Ergebnis.

Lösung

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_\Lambda x^6y^2\, dx\, dy - \int_\Lambda x^7y^3\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 x^6 dx \int_0^1 y^2 dy - \int_0^1 x^7 dx \int_0^1 y^3 dy \\
&= \frac{1}{21} - \frac{1}{32}
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von Fubini gilt: $J_2 = J_1$

2.4.3 Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen eines Ellipsoides mit Halbachse $a, b, c > 0$

Lösung

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\rho &= (\nabla_\xi e_\rho)(\frac{d}{dt}\xi) = (\partial_\rho e_\rho)(\partial_t \rho) + (\partial_\phi e_\rho)(\partial_t \phi) + (\partial_z e_\rho)(\partial_t z) = e_\phi \dot{\phi} \\
\dot{e}_\phi &= -e_\rho \dot{\phi} \\
\dot{e}_z &= 0
\end{aligned}$$

Verwende die verallgemeinerten Kugelkoordinaten:

$$x = \begin{pmatrix} a\,r\,sin\theta\,cos\phi \\ b\,r\,sin\theta sin\phi \\ c\,r\,cos\theta \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Funktionaldeterminante:

$$det\ D\Phi = abc\,r^2\,sin\theta$$

Und damit berechnet sich das Volumen zu:

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi abc\,r^2\,sin\theta = \frac{4\pi}{3} abc\,R^3$$

2.4.4 Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch einen Kreiszylinder mit Radius R aus einer Vollkugel vom Radius $2R$ ausgeschnitten wird, wenn das Kugelzentrum auf der Zylinderachse liegt

Lösung
Verwende unbedingt eine Zeichnung !!!!Das Volumen des Kugelsektors der vom Durchschnitt des Kreiszylinders mit der Kugel bestimmt wird lautet

$$\int_0^{2R} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} r^2 sin\theta\ d\phi d\theta dr = 4\frac{4\pi}{3} R^3(1 - cos\theta_0)$$

Geometrisch errechnet man $cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Die höhe des ganz in der Kugel enthaltenen Kreistylinders misst $H = \sqrt{3}R$
Damit besitzt der Kreistzylinder das Volumen:

$$S = \frac{8}{3}\pi(2 - \sqrt{3})R^3$$

Das Komplemet des Kugelsektors im Zylinder ist gleich der Differenz zwischen dem halben Zylindervolumen Z und dem durch den Kugelsektor bestimmten Kegelvolumen K:

$$Z - K = \pi R^2 \sqrt{3} R - \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{3} R$$

Damit misst das totale Volumen:

$$2(S + Z - K) = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \pi R^2$$

2.4.5 Aufgabe

Sei D das Dreieck mit dem Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Berechnen Sie:

$$\int \frac{sin\, x}{x}\, dxdy$$

Lösung

Der Versuch zuerst nach x zu integrieren scheitert. Also integriere zuerst nach y.

$$\int_D \frac{sin\, x}{x} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{sin\, x}{x} dy \right) dx = \int_0^1 sin\, x\; dx = 1 - cos 1$$

2.4.6 Aufgabe

Sei $B_{R(0)}$ die Vollkugel vom Radius $R > 0$ um den Ursprung im R^3. Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie seinen Wert:

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|} d^3x$$

Lösung

Definiere $B_R^\rho(0)$ als die Kugelschale mit $\rho \leq r \leq R$.
Damit gilt:

$$\int_{B_R^\rho(0)} \frac{1}{|x|} = \int_\rho^R dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r^2 sin\theta\; d\phi d\theta dr = 4\pi \frac{1}{2}(R^2 - \rho^2) \to 2\pi R^2$$

2.5 Volumenintegrale von Vektorfeldern

2.5.1 Aufgabe

Bestimmen Sie den Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{|K|} \int_K dxdydz(x, y, z)$$

des Kugeloktanten K. (dabei bezeichnet |K| das Volumen von K)

$$K = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x, y, z \geq 0\}$$

Lösung

Verwende Kugelkoordinaten, Berechne z-Komponente. Aus Symmetriegründen ist $S_x = S_y = S_z$

$$\int_K dxdydz\ z = \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi\ (r^2 sin\theta)(r\, cos\theta) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} sin^2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$