1 Koordinatentransformation

Bestimmen Sie allgemeine Formeln für die Geschwindigkeit $\dot{r}(t)$ sowie die Beschleunigung $\ddot{r}(t)$ eines Teilchens in Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z.
Drücken Sie zuerst die Position $r(t)$ mit den Einheitsvektoren $e_\rho,\ e_\phi,\ e_z$ aus bevor Sie nach der Zeit ableiten.

2 Integration

2.1 Wegintegrale von Vektorfeldern

2.1.1 Aufgabe

Berechnen Sie folgende Wegintegrale
$f(x,y) = (y,x) \qquad \gamma(t) = (t,t^2) \quad t \in [0,1]$
$f(x,y) = (x^2,y^2) \qquad \gamma(t) = (2t,4t) \quad t \in [0,1]$
$f(x,y) = (e^x,e^y) \qquad \gamma(t) = (t,t^2) \quad t \in [0,1]$
$f(x,y,z) = (x^2{+}5y{+}3xy, \quad 5x{+}3xy{-}2, \quad 3xy{-}4z) \qquad \gamma(t) = (-sin(t), cos(t), 0) \quad t \in [0,2\pi]$

2.1.2 Aufgabe

Sei $G \subseteq R^n$offen und zusammenhängend und $v \in C^1(G,R)$. Zeigen Sie, dass man die Funktion v aus ihrem Gradienten und einem Anfangswert $v(x_0)$ rekonstruieren kann.

$$v(x) = v(x_0) + \int grad\, v(y)\ dy$$

Dabei bezeichne γ eine stückweise stetig differenzierbare und ganz in G verlaufende Kurve mit Anfangspunkt $x_0 \in G$ und Endpunkt $x \in G$.

2.2 Oberflächenintegrale von Skalarfeldern

2.2.1 Aufgabe

Berechnen Sie das Integral der Funktion $f : R^3 \to R, \quad f(x,y,z) = z$ über die Hälfte $z \geq 0$ einer Vollkugel vom Radius $R > 0$

2.3 Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

2.3.1 Aufgabe

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $f : R^3 \to R^3$

$$f(x,y,z) = (0,0,z)$$

durch die obere Hälfte S^+der Kugeloberfläche

$$S^+ = \{(x,y,z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

2.3.2 Aufgabe

Integrieren Sie folgendes Vektorfeld über die Oberfläche der im Ursprung des R^3 zentrierten Kugel vom Radius $R > 0$:

$$A(x) = g(|x|)\frac{x}{|x|} \qquad\qquad A : R^3 \to R^3$$

Finden Sie ein Potentail $\Phi : R^3 \to R \quad A = -\nabla\Phi$ zu dem das Vektorfeld gehört.

2.3.3 Aufgabe

Integrieren Sie das Vektorfeld:

$$B(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$$

über die Oberfläche des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a, b, c > 0$$

2.3.4 Aufgabe

Integrieren Sie die folgenden Vektorfelder über die Oberfläche der im Ursprung des R^3zentrierten Kugel vom Radius 1

$$A(x, y, z) = (1 - x^2, 0, 2x^2z - x)$$

$$B(x, y, z) = (x + z, -y - z, x + y)$$

2.4 Volumenintegrale von Skalarfeldern

2.4.1 Aufgabe

Berechnen Sie den Flächeinhalt einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$.

2.4.2 Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$J_1 = \int_\Lambda (x^6y^2 - x^7y^3)dxdy$$

$$J_2 = \int_\Lambda (x^6y^2 - x^7y^3)dydx$$

mit $\Lambda = [0, 1] \times [0, 1]$. Begründen Sie das Ergebnis.

2.4.3 Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen eines Ellipsoides mit Halbachse $a, b, c > 0$

2.4.4 Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch einen Kreiszylinder mit Radius R aus einer Vollkugel vom Radius $2R$ ausgeschnitten wird, wenn das Kugelzentrum auf der Zylinderachse liegt

2.4.5 Aufgabe

Sei D das Dreieck mit dem Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Berechnen Sie:

$$\int \frac{sin\,x}{x}\,dxdy$$

2.4.6 Aufgabe

Sei $B_{R(0)}$die Vollkugel vom Radius $R > 0$ um den Ursprung im R^3. Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie seinen Wert:

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|} d^3x$$

2.5 Volumenintegrale von Vektorfeldern

2.5.1 Aufgabe

Bestimmen Sie den Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{|K|} \int_K dxdydz(x, y, z)$$

des Kugeloktanten K. (dabei bezeichnet |K| das Volumen von K)

$$K = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x, y, z \geq 0\}$$