1 Koordinatentransformationen

1.1 Koordinatentransformation

1.1.1 Allgemeines

Betrachte alte Koordinaten $x_i$und neue Koordinaten ξ_i. Die Einheitsvektoren sind $e_i$sowie $\tilde{e_j}$.
Diese sind zu unterscheiden vom lokalen n-Bein das unten definiert wird.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_3 = \tilde{e}_1 \xi_1 + \tilde{e}_2 \xi_2 + \tilde{e}_3 \xi_3$$

Vergleiche mit lokalem n-Bein in Polarkoordinaten:

$$e_\rho = \begin{pmatrix} cos\,\phi \\ sin\,\phi \end{pmatrix} \qquad e_\phi = \begin{pmatrix} -sin\,\phi \\ cos\,\phi \end{pmatrix}$$

1.1.2 Definition

Es sei $U \subset R^n$ und $V \subset R^n$. Dann heißt $\Phi : U \rightarrow V$ Koordinatentransformation, falls:

1. Φist bijektiv
2. Φist C^∞

1.1.3 Standardbeispiel

2D Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\, cos\,\phi \\ x_2 &= \rho\, sin\,\phi \end{aligned}$$

1.2 Koordinatenlinie

1.2.1 Definition

Die Kurve $t \rightarrow \Phi(\xi + t\tilde{e_j})$ ist die j-te Koordinatenlinie

1.3 lokales n-Bein

1.3.1 Definition

Es sei $\Phi : U \rightarrow V$ und $x = \Phi(\xi)$. Dann ist das lokale n-Bein an der Stelle $x = \Phi(\xi)$ definiert durch:

$$D\Phi(\xi)e_j \qquad j \tilde{=} 1, ..., n$$

1.3.2 Bemerkung

1. n-Bein spannt R^n auf, da $det\, D\Phi(\xi) \neq 0$
2. i.A. ist n-Bein nicht orthogonal

1.3.3 Standardbeispiel

Betrachte 2D Polarkoordinaten

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \, cos\, \phi \\ \rho \, sin\, \phi \end{pmatrix}$$

Berechne lokales n-Bein

$$D\Phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \partial_\rho x_1 & \partial_\phi x_1 \\ \partial_\rho x_2 & \partial_\phi x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\, \phi & -\rho \, sin\, \phi \\ sin\, \phi & \rho \, cos\, \phi \end{pmatrix}$$

Mit Normierung erhält man:

$$e_\rho = \begin{pmatrix} cos\, \phi \\ sin\, \phi \end{pmatrix} \qquad e_\phi = \begin{pmatrix} -sin\, \phi \\ cos\, \phi \end{pmatrix}$$

1.4 Umrechnung von Differentialoperatoren

1.4.1 Allgemein

Die in der Physik gängigen Differentialoperatoren sind in kartesischen Koordinaten definiert:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ ... \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

Physikalische würde ein Operator$(\partial_{\xi_1}, ..., \partial_{\xi_n})$ wenig Sinn machen.Vielmehr muss man den kartesischen Differentialoperator in den neuen Koordinaten ausdrücken.

1.4.2 Anschaulich

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\partial_{\xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\partial_{\xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\partial_{\xi_3} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\partial_{\xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\partial_{\xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\partial_{\xi_3} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}\partial_{\xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}\partial_{\xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\partial_{\xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \\ \partial_{\xi_3} \end{pmatrix} = (D\Psi)^T \, \nabla_\xi$$

1.4.3 Mathematischer Beweis

Betrachte die Funktion $f : U \rightarrow R \qquad \xi \mapsto f(\xi)$ sowie die Koordinatentransformation $\Phi : U \rightarrow V$ und $x = \Phi(\xi)$ bzw. deren Umkehrtransformatio $\Psi : V \rightarrow U$ und $\xi = \Psi(x)$. Damit lässt sich f schreiben als:

$$x \rightarrow f(\Psi(x)) = f \circ \Psi(x) = g(x)$$

Bilde davon das Differential:

$$\begin{aligned} D\,g(x) &= D(f \circ \Psi(x)) \\ &= D\,f(\xi)\;D\,\Psi(x) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} (D\,g(x))^T &= (D\,\Psi(x))^T\;(D\,f(\xi))^T \\ \nabla_x &= (D\Psi)^T\;\nabla_\xi \end{aligned}$$

1.4.4 Standardbeispiel

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \phi &= arctan\frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$D\Psi = \begin{pmatrix} cos\,\phi & sin\,\phi \\ -\frac{1}{\rho}sin\,\phi & \frac{1}{\rho}cos\,\phi \end{pmatrix}$$

$$(D\Psi)^T = \begin{pmatrix} cos\,\phi & -\frac{1}{\rho}sin\,\phi \\ sin\,\phi & \frac{1}{\rho}cos\,\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\phi & -\frac{1}{\rho}sin\,\phi \\ sin\,\phi & \frac{1}{\rho}cos\,\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\rho \\ \partial_\phi \end{pmatrix}$$

$$\nabla = e_\rho \partial_\rho + e_\phi \frac{1}{\rho} \partial_\phi$$

Damit lassen sich alle anderen Differentialoperatoren ausrechnen.

1.5 Physikalisch wichtige Koordinatensysteme

1.5.1 Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \\ \rho \sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
grad\, U &= (e_\rho \partial_\rho + e_\phi \rho \partial_\phi + e_z \partial_z)\, U \\
div\, V &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi V_\phi + \partial_z V_z \\
rot\, V &= e_\rho \left(\frac{1}{\rho}\partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi\right) + e_\phi\,(\partial_z V_\rho - \partial_\rho V_z) + e_z \left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho V_\phi) - \frac{1}{\rho}\partial_\phi V_\rho\right) \\
\Delta U &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\, \partial_\rho U) + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\phi\phi} U + \partial^2_{zz} U
\end{aligned}$$

1.5.2 Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
grad\, U &= (e_r \partial_r + e_\theta \frac{1}{r}\partial_\theta + e_\phi r \sin\theta\, \partial_\phi)\, U \\
div\, V &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 V_\rho) + \frac{1}{r \sin\theta}\partial_\theta(V_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\partial_\phi V_\phi \\
rot\, V &= e_\rho \frac{1}{r \sin\theta}\left[\partial_\theta(V_\phi \sin\theta) - \partial_\phi V_\theta\right] + e_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi V_r - \partial_r(r\, V_\phi)\right] + e_\phi \frac{1}{r}\left[\partial_r(r\, V_\theta) - \partial_\theta V_r\right] \\
\Delta U &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\, \partial_r U) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\, \partial_\theta U) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial^2_{\phi\phi} U
\end{aligned}$$

2 Integration

in diesem Abschnitt werden Vektoren ausnahmsweise mit Pfeil drüber geschrieben
!

2.1 Satz von Fubini

2.1.1 Satz

Es sei $f : M_1 \times M_2 \to R$ (Lipschitz) stetig, M_1 , M_2 beschränkt, $|M_1| < \infty$, $|M_2| < \infty$ sowie f beschränkt.
Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{M_1} f(x,y)\, d^n y \\ f_2(y) &= \int_{M_2} f(x,y)\, d^m x \end{aligned}$$

Rieman-Integrabel und es gilt:

$$\int_{M_2} f_1(x)\, d^m x = \int_{M_1} f_2(y)\, d^n y = \int_{M_1 \times M_2} f(x,y)\, d^m x\, d^n y$$

2.1.2 Anwendung

Wenn ein Integrationsgebiet in einer Dimension x von Konstanten und in der anderen Dimensionen y von Funktionen $g(x)$begrenz wird integriere erst über y

2.2 Wegintegrale

2.2.1 Wegintegrale von Skalarfeldern

Gegeben ist die stetige Funktion $f : R^n \to R$ und der stetig differenzierbare Weg $\vec{\gamma} : [a,b] \to R^n$. Dann ist das Wegintegral gegeben durch:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, ||\frac{d\vec{\gamma}}{dt}||\, dt$$

2.2.2 Wegintegrale von Vektorfeldern

Gegeben ist die stetige Funktion $f : R^n \to R^n$ und der stetig differenzierbare Weg $\gamma : [a,b] \to R^n$. Dann ist das Wegintegral gegeben durch:

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}\, dt$$

2.3 Oberflächenintegrale

2.3.1 Oberflächenintegrale von Skalarfeldern

Gegeben ist die stetige Funktion $f : R^n \to R$ und die Fläche F mit Parametrisierung $\phi : B \to R^n$ Dann ist das Oberflächenintegral gegeben durch:

$$\int_F f(\vec{x}) d\sigma = \int_B f(\phi(u,v))\, |\vec{\phi_u} \times \vec{\phi_v}|\, du\, dv$$

2.3.2 Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Gegeben ist die stetige Funktion $f : R^n \to R^n$ und die Fläche F mit Parametrisierung $\phi : B \to R^n$ Dann ist das Oberflächenintegral gegeben durch:

$$\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\vec{\sigma} = \int_B \vec{f}(\phi(u,v))\ \vec{\phi_u} \times \vec{\phi_v}\ du\, dv$$

Dieses Integral stellt den Fluss des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Fläche F dar.

2.3.3 Physikalisch wichtige Koordinaten

Kreisfläche in xy-Ebene:

$$d\vec{\sigma} = \rho\ \hat{e}_z\ d\rho\, d\phi$$

Zylinderoberfläche von Radius R:

$$d\vec{\sigma} = R\, \hat{e}_\rho\ dz\, d\phi$$

Kugeloberfläche von Radius R:

$$d\vec{\sigma} = R^2\ sin\vec{(}\theta)\ \hat{e}_r\ d\phi\, d\theta$$

2.4 Volumenintegrale

2.4.1 Volumenintegrale von Skalarfeldern

Für $M \subset R^n$, $|M| < \infty$, $f : M \to R$ mit f stetig sowie der bijektiv und stetig differenzierbaren Koordinatentransformation $\Phi : M \to \tilde{M}$ mit $\xi \mapsto x$ gilt:

$$\int_{\tilde{M}} f(\vec{x}) d^n x = \int_M f(\Phi(\vec{\xi}))|det\, D\Phi(\vec{\xi})| d^n \xi$$

2.4.2 Volumenintegrale von Vektorfeldern

Ist die Funktion keine skalare Funktion sondern eine Vektorfunktion, so ist jede Komponente des Integrals ein skalares Integral. Ein beispiel hierfür ist der Schwerpunkt:

$$S = \frac{1}{|K|} \int_K d^3 x\ \vec{x}$$

2.4.3 Physikalisch wichtige Koordinaten

Zylinderkoordinaten:

$$d^3 x = r\ dr\, d\phi\, dz$$

Kugelkoordinaten:

$$d^3 x = r^2\ sin(\theta)\ dr\, d\phi d\theta = r^2\ dr\, d\phi\, dcos(\theta) \qquad cos(\theta) \in [-1, 1]$$