MICHAEL SCHRAPP

Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1

Es ist $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0$ unsere NB zur Funktion $f(x,y,z) = x - y + z$

Wir definieren die Lagrange-Funktion:

$$F = f - \lambda\varphi$$

Berechnen die partiellen Ableitungen dazu und setzen diese gleich 0.

$$\begin{aligned} F_x &= 1 - \lambda 2x = 0 \\ F_y &= -1 - \lambda 2y = 0 \\ F_z &= 1 - \lambda 4z = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Die ersten 3 Gleichungen lösen wir nun nach λ auf, und setzen sie in die 4. Gleichung ein.

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\lambda} \quad y &= \frac{-1}{2\lambda} \quad z = \frac{1}{4\lambda} \\ \Longrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} &+ 2 \cdot \frac{1}{16\lambda^2} - 2 = 0 \end{aligned}$$

Hieraus bekommen wir: $\lambda = \pm\sqrt{5}/4$ und somit $(x,y,z) =$ Da f auf M eine kompakte Menge bildet, besitzt f nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ein Maximum und ein Minimum.

$(x,y,z) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ bildet das Maximum
$(x,y,z) = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$ bildet das Minimum

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ zunächst im innern von D.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x \end{pmatrix} = 0$$

Somit ist (0,0) der einzige kritische Punkte.
Zur Bestimmung der Art des Extremums berechnen wir die Hesse-Matrix H.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

H ist mit dem Hauptminoren-Kriterium positiv definit, somit besitzt f in (0,0) ein (lokales) Minimum.

Nun zum Rand von D.
Der durch $x^2 + y^2 - 1 = 0$ beschriebene Rand kann auch durch die Polarkoordinaten

$$x(t) = \cos t$$
$$y(t) = \sin t$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ $(r = 1)$ beschrieben werden.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f(t) &= \cos^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t \\ &= 1 - 1/2 \sin 2t \end{aligned}$$

Für das Extrema muss $f'(t) = 0$ gelten.

$$f'(t) = -\cos t = 0 \Longrightarrow 2t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

daraus erhalten wir die folgenden Lsg.(beachte $t \leq 2\pi$)

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \quad t_4 = \frac{3\pi}{4} \quad t_2 = \frac{5\pi}{4} \quad t_3 = \frac{7\pi}{4}$$

und damit die 4 Extrema

$$P_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) \quad P_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) \quad P_3 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) \quad P_4 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$$

Die Funktionswerte ergeben:
$f(t_1) = 1/2$
$f(t_2) = 3/2$
$f(t_3) = 1/2$
$f(t_4) = 3/2$
die Punkte $P_{1,3}$ sind daher ein Minimum, $P_{2,4}$ sind ein Maximum

Aufgabe 3

Sei $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\cos t \end{pmatrix}$$

Für die 1-Norm gilt: $\|\varphi'(t)\|_1 = 1 + 3|\cos t|$

Daher folgt für die Bogenlänge l der Kurve:

$$l = \int_0^\pi \|\varphi'(t)\|_1 dt = \int_0^\pi 1 + 3|\cos t| dt$$

$$= \pi + 3 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos t = \pi + 6 \cdot [\sin t]_0^{\pi/2} = \pi + 6$$

Aufgabe 4

a) Für Parameter $t_0 < t_2$ in $[-\pi, \pi]$ mit $0 < t_1 - t_0 < 2\pi$ gilt $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ genau dann, wenn $\cos t_0 = \cos t_1$ ist und $\sin 2t_0 = \sin 2t_1$. Dies ergibt $\sin t_0 = \sin t_1$, sofern $\cos t_0 \neq 0$ ist. Da $t \mapsto e^{it}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi[$ injektiv ist, bleibt $t_0 = -\pi/2$, $t_1 = \pi/2$ als einziges Parameterpaar der gesuchten Art zu einem Doppelpunkt.

Die Ableitung $\gamma'(t) = \big(-\sin t, \cos 2t\big)$ hat keine Nullstellen, da $\pi\mathbb{Z}$, die Nullstellenmenge des Sinus, keinen Punkt von $\pi/4 + (\pi/2)\mathbb{Z}$, der Nullstellenmenge von $t \mapsto \cos 2t$, enthält. Also hat γ keine singulären Punkte. — Die Ableitungswerte $\gamma'(-\pi/2) = \big(1, -1\big)$ und $\gamma'(\pi/2) = \big(-1, -1\big)$ sind orthogonal. Also schneidet γ sich selbst im Doppelpunkt senkrecht.

b) Die Punkte $\big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos t, \frac{1}{2}\sin 2t\big)$ liefern

$$x^2(1 - x^2) - y^2 \;=\; \cos^2 t \sin^2 t - \tfrac{1}{4}\sin^2 2t \;=\; 0\,.$$

Also sind alle Kurvenpunkte auch Nullstellen von f. Ist umgekehrt (x, y) eine Nullstelle von f, dann ist $y^2 = x^2(1 - x^2) \geq 0$, also stets $1 - x^2 \geq 0$. Das ergibt $0 \leq x^2 \leq 1$. Daher existiert ein t mit $x = \cos t$. Wegen $y^2 = x^2(1 - x^2) = \cos^2 t \sin^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t$ wird entweder $y = \frac{1}{2}\sin 2t$ oder $y = -\frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2}\sin(-2t)$ und ohnehin $x = \cos(-t)$. Jede Nullstelle von f liegt daher auf dem Bild von γ.

Aufgabe 5

a) Die Ableitung der *Astroide* genannten Kurve γ ist

$$\begin{aligned}\gamma'(\varphi) \;&=\; \big(-3\sin\varphi\cos^2\varphi\big) + i\big(3\cos\varphi\sin^2\varphi\big)\\ &=\; 3\sin\varphi\cos\varphi\big(-\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\\ &=\; \tfrac{3}{2}\sin 2\varphi\big(-\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,.\end{aligned}$$

Ihre Nullstellenmenge ist die von $\sin 2\varphi$, also $\frac{1}{2}\pi\mathbb{Z}$. Das ist die Menge der singulären Punkte der Astroiden.

b) Die Bogenlänge von γ im Intervall $[0, 2\pi]$ ist bekanntlich das Integral über die Norm der Ableitung, d.h.

$$\begin{aligned}\ell \;&=\; \int_0^{2\pi} \big\|\gamma'(\varphi)\big\|_2\, d\varphi \;=\; \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \big|\sin 2\varphi\big|\, d\varphi\\ &=\; 6\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi \;=\; 3\big(-\cos 2\varphi\big)\Big|_0^{\pi/2} \;=\; 6\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Wir definieren f, g durch $f(x, y, z) := x^p y^q z^r$, $g(x, y, z) := x+y+z-a$. Zudem Sei die Lagrange-Funktion F gegeben durch:

$$F := f + \lambda g$$

Notwendig für ein Extrema ist die Bedingung $\nabla F = 0$. Hieraus folgt:

$$\begin{pmatrix} px^{p-1}y^q z^r + \lambda \\ qx^p y^{q-1} z^r + \lambda \\ rx^p y^q z^{r-1} + \lambda \\ x + y + z - a \end{pmatrix} = 0$$

Aus der ersten und der zweiten Gleichung folgern wir $py = qx$ und $pz = rx$ aus der ersten und der dritten. Eingesetzt in die vierte erhalten wir

$$x(p + q + r) = a$$

sodass schliesslich $x = \frac{pa}{p+q+r}, \quad y = \frac{qa}{p+q+r}, \quad z = \frac{ra}{p+q+r}$
Die Funktion f verschwindet auf dem Rand der beschränkten Nebenbedingungsmenge $g(x, y, z) = 0$, woraus folgt, dass wir die Maximalstelle von f gefunden haben.

Aufgabe 7

Zunächst ist zu zeigen, dass für beliegige aber feste $(\widehat{x}_0, \widehat{y}_0)$ ein z existiert, so dass $f(x, y, z) = 0$

Setze:

$$\zeta(z) = f(\widehat{x}_0, \widehat{y}_0, z) = z^3 + 4z - \widehat{x}^2 + \widehat{x}\widehat{y}^2 + 8\widehat{y} - 7$$

da $\zeta(z) \to \pm\infty$ für $\zeta(z) \to \pm\infty$ und $\zeta(z)$ stetig $\to \exists\ \widehat{z}$ mit $\zeta(\widehat{z}) = 0$

Für die partielle Ableitung gilt stets:

$$f_z = 3z^2 + 4 > 0$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen existiert nun eine Umgebung U und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$, $z = g(x, y)$ mit $f(x, y, g(x, y)) = 0$.

Um den Gradienten von g zu bekommen, differenzieren wir ausgehend von $f(x, y, g(x, y)) = 0$ jeweils nach x bzw. y.

$$\begin{aligned} f_x(x, y, g(x, y)) + f_z(x, y, g(x, y))g_x(x, y) = 0 \\ \to g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \end{aligned}$$

Analog wird f_y berechnet. Insgesamt ergibt sich schliesslich:

$$\nabla g = -\frac{1}{3z^2+4}\begin{pmatrix} -2x+y^3 \\ 2xy+8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$E \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$

Die Kurve $\quad\gamma(t) = (a\cos t,\; b\sin t), \quad t\in\mathbb{R}\quad$ ist natürlich stetig differenzierbar (elemantare Funktionen) und aufgrund der Periodizitäts-Eigenschaften des Sinus und Cosinus 2π-periodisch. Für die Komponenten der Kurve gilt:

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

eingesetzt in E ergibt das

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2}\cos^2 t + \frac{b^2}{b^2}\sin^2 t = 1$$

D.h. $\quad\gamma(t)$ hat das Bild E.

Nun berechnen wir die Krümmung für die Kurve $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ mithilfe der Formel aus der Vorlesung

$$\kappa(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t)-\gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{\left(\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2\right)^{3/2}} \qquad (*)$$

dazu berechnen wir die einzelnen Komponenten:

$$\gamma_1' = 1 \quad \gamma_1'' = 0$$

$$\gamma_2' = y'(x) \quad \gamma_2' = y''(x)$$

einsetzen in $(*)$ liefert die gewünschte Behauptung

$$\kappa(t) = \frac{y''(x)}{\left(1+y'(x)^2\right)^{3/2}}$$

Es sei nun $a=b=r$

Wir berechnen die Krümmung in Polar-Koordinaten $\quad \gamma(t)) = (a\cos t, b\sin t)$

Es gilt:

$$\gamma_1' = -a\sin t \quad \gamma_1'' = -a\cos t$$

$$\gamma_2' = b\cos t \quad \gamma_2'' = -b\sin t$$

Setzen wir dies in $(*)$ ein, so erhalten wir:

$$\kappa(t) = \frac{1}{r} = const.$$

Aufgabe 9

Es gilt: $f(\pi, 0, 0) = 0$ und:

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= -e^{-2z}\sin(x-y) \\ f_x(x,y,z) &= e^{-2z}\sin(x-y) \\ f_x(x,y,z) &= -1 - 2e^{-2z}\cos(x-y) \end{aligned}$$

Wegen $f_z|_P \neq 0$ folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass f in einer Umgebung des Punktes P nach z auflösbar ist.

Für den Gradienten von g gilt: $\nabla g|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} -\frac{f_x}{f_z} \\ -\frac{f_y}{f_z} \end{pmatrix} |_P = 0$

$n = \nabla f|_P = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ (nach Vorlesung)

Für die Tangentialebene ergibt sich aus $(x-p)\cdot n = 0$ schließlich:
$z = 0$