Technische Universität München

Michael Schrapp — Analysis II

Übungsblatt 2

Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Ellipsoid $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$ und berechnen Sie Maximum und Minimum für die Restriktion f_M der auf $\mathbb{R}^3$ durch $f(x, y, z) = x - y + z$ definierten Funktion f.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Hinweis:* Betrachten Sie zunächst das Innere und dann den Rand von D.

Aufgabe 3

Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = 3 \sin t$. Man berechne die Lnge des Graphen von$f (graph(f) \subset \mathbb{R}^2)$, wenn R^2 mit der Norm $\|\|_1$ versehen wird.

Aufgabe 4

Es soll die Kurve $\gamma(t) = \big(\cos t, \cos t \sin t\big), -\pi \leq t \leq \pi$ betrachtet werden.

a) Untersuchen Sie γ auf Doppelpunkte und auf singuläre Punkte. Bestimmen Sie den Schnittwinkel von γ mit sich selbst in den Doppelpunkten.

b) Zeigen Sie, dass das Bild der Kurve übereinstimmt mit der Nullstellenmenge der durch die Gleichung $f(x, y) = x^2(1 - x^2) - y^2$ gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf von γ in der Ebene.

Aufgabe 5

Die Bahnkurve eines Punktes auf dem Rand eines Kreises, der in der Ebene $\mathbb{R}^2$ im Inneren eines festen Kreises von vierfachem Radius abrollt, wird eine *Astroide* genannt. Eine Parametrisierung lautet:

$$\gamma(\varphi) \;=\; \big(\cos^3 \varphi, \sin^3 \varphi\big)$$

a) Bestimmen Sie die singulären Punkte

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve für einen Umlauf.

Aufgabe 6

Seien $a, p, q, r > 0$ strikt positive, feste Zahlen. Bestimmen Sie die drei Summanden $x, y, z > 0$in der Zerlegung von $a = x + y + z$ so, dass $x^p y^q z^r$ maximal wird.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass $f(x, y, z) = z^3 + 4z - x^2 + xy^2 + 8y - 7 = 0$ in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal als Graph der Funktion $z = g(x, y)$ darstellen lässt. Berechnen Sie die Ableitung von g.

Aufgabe 8

Zu Zahlen $a > b > 0$ wird die folgende Punktmenge in der Ebene betrachtet:

$$E \;=\; \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

Begründen Sie, dass E das Bild der durch $\gamma(t) = (a\cos t,\ b\sin t),\quad t \in \mathbb{R}$ definierten 2π-periodischen, stetig differenzierbaren regulären Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist.
Zeigen Sie, dass die Krümmung einer Kurve in kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ gegeben ist durch:

$$\kappa(t) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$$

Und berechnen Sie im Falle $a = b$ die Krümmung der Kurve in Polar- Koordinaten.

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass sich $f(x, y, z) = 1 - z + e^{-2z}\cos(x - y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $P(\pi, 0, 0)$ als Graph einer stetig, differenzierbaren Funktion $z = g(x, y)$ darstellen lässt.
Berechnen Sie $\nabla g(\pi, 0)$ sowie die Tangentialebene im Punkt P.