Michael Schrapp
Vorlesung Dienstag

Repetitorium Analysis II für Physiker

Skript
zu
Metrik, Kurven, Extrema
und impliziten Funktionen

1 $\mathbb{R}^n$ als Metrischer Raum

Definition 1.1 (Norm)
Sei V ein $\mathbb{R}$ Vektorraum. Die Funktion $\|\|: V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- $\|x\| > 0 \qquad \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
- $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\||$

$(V, \|\|)$ nennt man einen normierten Raum

Beispiele:

p-Norm:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p}$$

Der Spezialfall $n = 2$ ist die bekannte euklidische Norm: $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

∞-Norm:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} \qquad \forall i \in \{1, 2..., n\}$$

Sei nun f eine stetige Funktion im Intervall $I = [a, b]$, dann heißt

$$\|f\|_I = \sup\{|f(x)|; x \in I\}$$

die Supremumsnorm von f.

Bildung einer Norm:
Jedes Skalarprodukt $<,>$ induziert durch $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$ eine Norm. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. nicht jede Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert.

Definition 1.2 (Metrik)
Sei X eine beliebige Menge. Die Funktion $d : (x, y) \in X^2 \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls gilt:

- $d(x, y) > 0$ und $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(X, d) ist dann ein metrischer Raum.

Definitionen 1.3
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $B(a, \epsilon) = \{x \in X; d(x, a) < \epsilon\}$ (sog. ϵ-Kugel

- Die Menge $U \subset X$ heißt dann offen, falls $\forall x \in U$ ein ϵ existiert mit $B(x, \epsilon) \subset U$
- $A \subset X$ ist abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen.
- Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $R \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $\|z\| < R$ ist für alle $z \in B$.
- Die Menge $K \in \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

2 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definitionen 2.1 (Kurven)

- Eine stetige Abblidung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nennt man eine Kurve.
- Sei $\gamma(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve $[a, b] \to \mathbb{R}^2$und $t_0 \in \mathbb{R}$, dann heißt:

  $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ der Tangenteneinheitsvektor

  $\frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix}$ der Normaleneinheitsvektor

  $\kappa(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{(\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2)^{3/2}}$ die Krümmung and die Kurve.
- Gilt für eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, $\frac{\delta}{\delta t}\gamma_1(t_0) = 0$ und $\frac{\delta}{\delta t}\gamma_2(t_0) \neq 0$ so liegt bei t_0 eine vertikale Tangente vor. Ist $\frac{\delta \gamma_2}{\delta t}(t_0) = 0$ so handelt es sich um eine horizontale Tangente.
- Punkte mit $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ und $t_0 \neq t_1$ heißen Doppelpunkte und es existieren 2 Tangentialvektoren (siehe Beispiel).

Definition 2.2 (rektifizierbare Kurven)
Die differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nennt man rektifizierbar, falls ein $d > 0$ existiert, sodass für jede Zerlegung $P := \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ von $[a, b]$,

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_i - 1)| \leq d.$$

Die Länge der Kurve f ist dann definiert durch $L(f) := \sup L(f, P)$

Eine deutlich handlichere Formel zur Berechnung der Länge lautet:

$$L = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$$

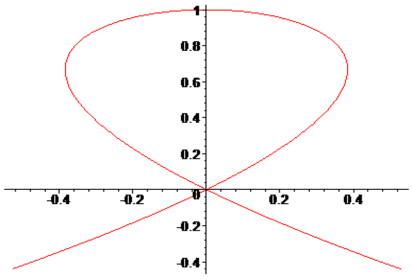
Dabei handelt es sich um die übliche euklidische Norm $\|\|_2$
die Bogenlänge kann jedoch auch in jeder beliebigen Norm berechnet werden. Die Veranschaulichung als herkömmliche Länge entfällt dadurch allerdigns.

Die Bogenlänge ist im übrigen invariant unter der Parametrisierung der Kurve.

Beispiel:

Gegeben Sei die Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - t^3 \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$

Es ist $\gamma(1) = \gamma(-1) = 0$ ein Doppelpunkt der Kurve.



3 Implizite Funktionen

Durch die Gleichung $f(x_1, x_2 ... x_{n-1}, y) = 0$ wird implizit z.B. die Funktion y in Abhänigkeit von $x_1 ... x_{n-1}$ definiert. Der folgende Hauptsatz besagt nun, unter welchen Bedingungen eine lokale Auflösungsfunktion $h(x)$ mit $y = h(x_1, x_2 ... x_{n-1})$ existiert.

Satz 3.1 (Hauptsatz über implizite Funktionen)
Gegeben sei die partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 0$. Gilt im Punkt (x_0, y_0) die Bedingung $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ sowie $f(x_0, y_0) = 0$, dann existiert die lokale Auflösungsfunktion $y = h(x)$ um den Punkt (x_0, y_0).

Es ergeben sich die partiellen Ableitungen der Funktion h ausgehend von $f(x_0, h(x_0)) = 0$ zu:

$$f_{x_i}(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0) h_{x_i}(x_0) = 0$$
$$\to h_{x_i}(x_0) = -\frac{f_{x_i}(x_0, h(x_0))}{f_y(x_0, h(x_0)}$$

Satz 3.2 (Umkehrfunktion)
$f : U \to \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$, stetig differenzierbar. $a \in U, f(a) = b$ und $\mathrm{J}f(a)$ sei invertierbar. Dann existiert $a \in V \subset U$ offen und $f(V) = V'$, sodass $f : V \to V'$ bijektiv. Es existiert also die eindeutige Umkehrabbildung $g : V' \to V$. g ist stetig differenzierbar.

Beispiel:

Gegeben Sei die Fuktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$ f ist überall differenzierbar.

Die Jakobi Matrix $J_f = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ hat die Determinante $e^x \neq 0$, und ist somit invertierbar.

Die Umkehrfunktion hat die Ableitung:$J_f^{-1} = J_{f^{-1}} = e^{2x} \frac{1}{e^x} \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$

Satz 3.3 (Tangentialebene)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, eine implizit definierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Gilt nach

Satz 3.1 $\nabla f(p) \neq 0$, dann ist durch

$$\overrightarrow{n} = \nabla f(x,y,z)|_p$$

ein Normalenvektor an die durch f beschriebene Fläche gegeben.

Sei nun $z = h(x,y)$ eine explizite Darstellung der Fläche f. Dann können wir die Tangententenvektoren in x- und y-Richtung angeben.

$$t_1 = \frac{\delta}{\delta x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\delta}{\delta x}h(x,y) \end{pmatrix}$$
$$t_2 = \frac{\delta}{\delta y}\begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\delta}{\delta y}h(x,y) \end{pmatrix}$$

Für die Tangentialfläche im Punkt p gilt:

$$\mathrm{T}(p) = \{x \in R^3 | (x-p) \cdot n = 0\}.$$

oder in Parameterform:

$$\mathrm{T}(p) = \{x \in R^3 | p + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \; ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Hinweis:
Der Normalenvektor n kann auch in folgender Form angegeben werden:

$$n = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x}h(x,y) \\ \frac{\delta}{\delta y}h(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$n = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x}h(x,y) \\ \frac{\delta}{\delta y}h(x,y) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta z}f(x,y,z) \\ \frac{\delta}{\delta z}f(x,y,z) \\ -1 \end{pmatrix} =^{\star} \begin{pmatrix} \frac{f_x}{f_z} \\ \frac{f_y}{f_z} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

wobei unter $=^\star$ Gleichung (1) verwendet wurde.

4 Extremwerte mit Nebenbedingungen im $\mathbb{R}^n$

Um Extremwerte unter Nebenbedinungen zu lösen, gibt es mehrere Möglichkeiten. 2 davon wollen wir hier kurz behandeln. Zunächst jedoch zeigt der folgende Satz überhaupt die Existenz absoluter Extrema.

Satz 4.1 (Satz von Weierstraß)
Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann besitzt f auf I ein Maximum und Minimum.

Satz 4.2 (Lagrange-Verfahren)
Sei $h : U \to \mathbb{R} \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^n$
$f_i : U \to \mathbb{R}$ mit den m Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ &... \\ f_m(x) &= 0 \end{aligned}$$

Man definiert nun die Lagrange-Funktion

$$F(x, \lambda) = h(x) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_1(x) \\ ... \\ f_m(x) \end{pmatrix} = h(x) + \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_m f_m(x)$$

und löst das Gleichungssystem

$$\nabla F = 0$$

mit den Variablen $x_1...x_n$ und $\lambda_1...\lambda_m$

Beispiel zum Lagrange-Verfahren:

Gesucht: Extrema von $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene

$$x + y + z = 0$$

mit der Kugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Lösung:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = 5x + y - 3z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)0$$

Für ein Extrema muss gelten: $\nabla F = 0$ also:

$$0 = \nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_\lambda \\ F_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \lambda + 2\mu x \\ 1 + \lambda + 2\mu y \\ -3 + \lambda + 2\mu y \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt schlielich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \mp\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 \\ \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Eine weitere Möglichkeit solche Aufgaben zu behandeln ist die Einführung neuer Koordinaten.

dazu ein Beispiel:
$f(x,y) = (x-y)e^{1-(x^2+y^2)}$ unter der NB: $x^2+y^2=1$
Wählen wir hier nun Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Setzen wir dies in die NB ein, erhalten wir $r=1$ und somit:
$f(r=1,\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi$
Dies ist eine Extremwertaufgabe in einer Variablen, die wir mit den Methoden aus Analysis 1 lösen können.

5 Variationsrechnung

Satz 5.1 (Eulersche Differentialgleichung)
Es Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (x,\dot{x},t) \mapsto L(x,\dot{x},t)$ 2-mal stetig partiell differenzierbar.
Man definiert nun die Wirkung S von L durch: $S = \int\limits_{t0}^{t_1} L(x(t),\dot{x}(t),t)\,dt$. Eine **notwendige** Bedingung für das Extremum von S lautet dann:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}_k} = \frac{\delta L}{\delta x_k} \qquad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung)}$$

Beweis:
Dazu varieren wir die Wirkung S:

$$\begin{aligned} \delta S = \int dtL(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x},t) - \int dtL(x,\dot{x},t) = 0 \\ (*) = \int dtL + \int dt\frac{\delta L}{\delta x}\delta x + \int dt\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\delta\dot{x} - \int dtL \\ = \int dt\frac{\delta L}{\delta x}\delta x + \int dt\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x \\ (**)0 = -\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} + \frac{\delta L}{\delta x} \end{aligned}$$

(*): Taylorentwicklung bis zur 1. Ordnung
(**): partielle Integration