Funktionen in mehreren Variablen
Lösungen

Jonas Funke

25.08.2008

1 Stetigkeit und partielle Differentiation

1.1 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ist die Funktion stetig? Ist sie partiell und total Differenzierbar?

Lösung

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Funktion als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Da

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})\right| \leq \left|x^2+y^2\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ist sie auch bei $(0,0)$ stetig.
Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Funktion partiell Differenzierbar un din $(0,0)$ gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(\frac{1}{h^2}) = 0$$

Analog gilt dies für $f_y(0,0) = 0$.

1.2 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(2\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Wie muss die Konstante a gewählt werden, damit $f(x,y)$ in $(0,0)$ stetig ist? (Hinweis: Übergang zu Polarkoordinaten)

b) Man bestimme eine Parametrisierung und eine implizite Darstellung der Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt $P(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$.

Lösung

a) Übergang zu polarkoordinaten liefert:

$$a = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(2r)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{2\sin(r)\cos(r)}{r} = 2 \cdot \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r)}{r} \cdot \lim_{r\to 0} \cos(r) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

b) Berechnung der Tangentialeben mit Taylorentwicklung:

$$z = f(\frac{\pi}{2}, 0) + \nabla f(\frac{\pi}{2}, 0)^T \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y - 0 \end{pmatrix} = 0 + \left(-\frac{4}{\pi}, 0\right)^T \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} = 2 - \frac{4}{\pi}x$$

Berechnung mit Parametrisierung:
Der Aufpunkt der Ebene ist $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)^T$.
Die Richtungsvektoren ergeben sich:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Tangentialebene ergibt sich:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{\pi} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1.3 Aufgabe (Potentialkasten)

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Psi(x, y, z) = \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) \text{ mit } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Potentialkasten löst:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z)$$

und berechnen Sie die möglichen Energieniveaus E_{n_x, n_y, n_z}.

Lösung (Potentialkasten)

Wir leiten Ψ zweimal nach x ab und erhalten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, y, z) = -\pi^2 n_x^2 \cdot \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) = -\pi^2 n_x^2 \cdot \Psi(x, y, z)$$

Analog folgt $\Psi_{yy}(x, y, z) = -\pi^2 n_y^2 \Psi(x, y, z)$ und $\Psi_z(x, y, z) = -\pi^2 n_z^2 \Psi(x, y, z)$. Dies setzen wir in die gegeben Schrödingergleichung ein und erhalten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, y, z) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = E_{n_x, n_y, n_z} \Psi(x, y, z)$$

$$\Rightarrow E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

1.4 Aufgabe (Wellengleichung)

Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

die Wellengleichung

$$\partial_t^2 \Psi(t,x) = c^2 \partial_x^2 \Psi(t,x)$$

erfüllt.

Lösung (Wellengleichung)

Wir führen zunächst die neuen Variablen

$$u(x,t) = x - ct$$

$$v(x,t) = x + ct$$

Nun berechnen wir die partielle ableitung nach t:

$$\partial_t^2 \Psi(x,t) = \partial_t (f_u(u) \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-c} + g_v(v) \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c}) = -c \cdot f_{uu}(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot g_{vv}(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \left(f_{uu} + g_{vv}\right)$$

Nun nach x:

$$\partial_x^2 \Psi(x,t) = \partial_x \left(f_u \cdot 1 + g_v \cdot 1\right) = f_{uu} + g_{vv}$$

Dies setzt man in die Wellengleichung ein und verifiziert so die Lösung.

1.5 Aufgabe (Totales Differential)

Man bestimme das totale Differential der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = 4x^3 y - 3x \cdot e^y$

b) $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

Lösung

a) dz$=$ $(12x^2 y - 3 \cdot e^y)dx + (4x^3 - 3x \cdot e^y)dy$

a) du$=$ $\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz$

2 Extremwertberechung

2.1 Aufgabe

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und chrakterisieren Sie diese.

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$$

Lösung

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 12y \\ -12x + 24y^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$I \quad 3x^2 - 12y = 0$$

$$II \quad -12x + 24y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y^2$$

II in I:

$$0 = y(y^3 - 1) \Leftrightarrow (y_1 = 0, x_1 = 0) \quad \vee \quad (y_2 = 1, x_2 = 2)$$

Die Punkte $P_1(0,0)$ und $P_2(2,1)$ sind stationäre, bzw. kritische Punkte.

$$\det(H_f(x)) = \det \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix} = 288xy - 122$$

Es ergibt sich:

$$P_1(0,0) : \det(H_f(0,0)) = -122 < 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$

$$P_2(2,1) : \det(H_f(2,1)) > 0 \quad \text{mit} \quad f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow lokalesMinimun$$

2.2 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4 - a\|\mathbf{x}\|^2 + x_1^2 \quad \text{mit}\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Berechnen Sie die kritischen Punkte und charakterisieren Sie diese in Abhängigkeit von a.

Lösung

Stationäre Punkte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x((x^2 + y^2) - a + 1) \\ 2y(2(x^2 + y^2) - a) \end{pmatrix} = 0$$

- Fall 1: $x_1 = 0 \wedge y_1 = 0$

- Fall 2: $x_2 = 0 \wedge (2(x_2^2 + y_2^2) - a) = 0$

$$\Leftrightarrow y_2 = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{für} \quad \boxed{a > 0}$$

- Fall 3: $(2(x_2^2 + y_2^2) - a + 1) = 0 \wedge y = 0$

$$\Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{a-1}{2}} \Rightarrow \text{für} \quad \boxed{a > 1}$$

- Fall 4: $(2(x_2^2 + y_2^2) - a + 1) = 0 \wedge (2(x_2^2 + y_2^2) - a) = 0 \Rightarrow$ keine Lösung
  Für die Hessematrix ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2(6x^2 + 2y^2 - a + 1) & 8xy \\ 8xy & 2(2x^2 + 6y^2 - a) \end{pmatrix}$$

Charakterisierung der stationären Punkte:

- Fall 1: a beliebig $\Rightarrow P_1(0,0)$

$$\det(H_f(0,0)) = 4a(a-1) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad a > 1 \quad (\text{mit} \quad f_{xx} < 0) \quad (lokalesMaximum) \\ = 0 & \text{für} \quad a = 1 \quad (\text{mit} \quad f_{xx} = 0) \quad (sieheFall4) \\ < 0 & \text{für} \quad a < 1 \quad (\text{mit} \quad f_{xx} > 0) \quad (Sattelpunkt) \end{cases}$$

- Fall 2: $a > 0 \Rightarrow P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}}) \wedge P_1$:

$$\det(H_f(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})) = 8a > 0 \quad \text{mit } f_{xx} > 0 \text{ ist } P_2 \text{ ein lokales Minimum}$$

- Fall 3: $a > 1 \Rightarrow P_3(\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}, 0) \wedge P_2 \wedge P_1$

$$\det(H_f(\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}, 0)) = 8(1-a) < 0$$

- Fall 4: $a = 1 \Rightarrow P_1 \wedge P_2$

  Problem: $\det(H_f(0,0)) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

  Um trotzdem zu testen um welche Art von stationären Punkt es sich handelt, betrachten wir $f(x,y) - f(0,0)$ in der Nähe von $(0,0)$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \epsilon\cos(\phi) \\ \epsilon\sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \epsilon \text{ hinreichend klein}$$

$$\Delta = f(\epsilon\cos(\phi), \epsilon\sin(\phi)) - f(0,0) = \epsilon^2(\epsilon^2 \underbrace{-1 + \cos(\phi)}_{[0,-2]})$$

  Für $\phi = 0$ folgt $\Delta > 0$ und für $\phi = \pi$ ist $\Delta < 0$, d.h für $a = 1$ ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt Zusammen:

$a < 0$: $P_1(0,0)$ Minimum

$o < a < 1$: $P_1(0,0)$ Sattelpunkt, $P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})$ Minimum

$a = 1$: $P_1(0,0)$ Sattelpunkt, $P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})$ Minimum

$a > 1$: $P_1(0,0)$ Maximum, $P_2(0, \pm\sqrt{\frac{a}{2}})$ Minimum, $P_3(\pm\sqrt{\frac{a-1}{2}}, 0)$ Sattelpunkt

2.3 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

Diskutieren Sie $f(x,y)$ (Periodizität, Nullstellen) und bestimmen Sie lokale Minima, lokale Maxima und Sattelpunkte. (Betrachten Sie zuerst die Periodizität und schränken Sie so den zu untersuchenden Bereich ein.)

Lösung

Da $\sin(x)$ 2π-periodisch ist gilt:

$$f(x+2\pi, y) = f(x,y) = f(x, y+2\pi)$$

Es reicht also den Breich $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$ zu untersuchen.
Nullstellen: $0 = \sin(x)\sin(y)$

$$\Rightarrow x = n\pi \vee y = m\pi \quad n, m = 0, 1, ...$$

Kritische Punkte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix} = 0$$

Fall 1: $\sin(y) = 0 \wedge \sin(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge y = l\pi \Leftrightarrow P_1(k\pi, l\pi)$$

Fall 2: $\cos(y) = 0 \wedge \cos(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \wedge y = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow P_2(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$$

Charakterisierung der kritischen Punkte:

$$\det H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} = \sin(x)^2 - \cos(y)^2$$

(x,y)	$\det H_f(x,y)$	$f_{xx}(x,y)$	Typ
$(0,0)$	-1		Sattelpunkt
$(\pi,0)$	-1		Sattelpunkt
$(0,\pi)$	-1		Sattelpunkt
(π,π)	-1		Sattelpunkt
$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	1	-1	lokales Maximum
$(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	1	1	lokales Minimum
$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	1	1	lokales Minimum
$(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	1	-1	lokales Maximum

2.4 Aufgabe

Bestimmen sie lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte folgender Funktionen:

a)

$$f(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$$

b)

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$$

Lösung

a) Es ergeben sich vier kritische Punkte:

$(1,2)$: $\det H_f = -144 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(1,-2)$: $\det H_f = -144 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(0,0)$: $\det H_f = 144 > 0$ und $f_{xx} = -24 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

$(2,0)$: $\det H_f = 144 > 0$ und $f_{xx} = 24 < 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

b) Es ergeben sich zwei kritische Punkte:

$(2,0)$: $\det H_f = -4 \cdot e^{-4} < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$(0,0)$: $\det H_f = 4 > 0$ und $f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum