

# Funktionen in mehreren Variablen

## Vorlesung

Jonas Funke

25.08.2008

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe, Skalarfelder, Stetigkeit</b>	<b>4</b>
2.1	Grundbegriffe . . . . .	4
2.2	Stetigkeit . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Partielle Differentiation</b>	<b>5</b>
3.1	Satz von Schwarz . . . . .	6
3.2	Der Gradient . . . . .	6
3.3	Die Kettenregel . . . . .	6
3.4	Die Richtungsableitung . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Totales Differential</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Taylorentwicklung</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Extremwertberechnung</b>	<b>9</b>

# 1 Einführung

Funktionen die von mehreren Variablen  $x_1, \dots, x_n$  abhängen und deren Wertebereiche mehrdimensional sein können, sind Funktionen in mehreren Variablen. Im allgemeinen gilt also:

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Man unterscheidet

- **Kurven im  $\mathbb{R}^m$** , d.h.  $n=1$  und somit  $\mathbf{f}: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$
- **Skalarfelder**, d.h.  $m=1$  und somit  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$
- **vektorwertige Funktionen**, d.h.  $n, m$  beliebig (siehe oben)

Wir beschäftigen uns hier vor Allem mit den **Skalarfeldern**. Einige Beispiele:

- Temperatur im Raum
- Druck im Raum
- Dichte
- ...

Skalarfelder können auf unterschiedliche Weise gegeben sein:

- **explizite Gleichung**  
Bsp:  $z = f(x, y, z) = 3xyz + \sin(xz) + 2x + 7$
- **implizite Gleichung**  
Bsp für  $f(x, y): z^3 - xz - y = 0$  ( $x \in \mathbb{R}, y > 0$ )
- komplizierte Vorschriften, wie z.B. DGLen

## 2 Grundbegriffe, Skalarfelder, Stetigkeit

### 2.1 Grundbegriffe

Zunächst müssen einige Grundbegriffe geklärt werden, damit man Begriffe wie Stetigkeit überhaupt definieren kann. Der Ausgangspunkt zur Definition von Mengen im  $\mathbb{R}^n$  ist die **r-Umgebung**. Sie stellt das Analogon zur  $\epsilon$ -Umgebung im  $\mathbb{R}^1$  dar. Man kann sie sich als eine Kugel um den Punkt  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  mit dem Radius  $r > 0$  vorstellen:

$$U_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

Nun können wir zur Definition von Mengen im  $\mathbb{R}^n$  übergehen:

**Definition 1** Sei  $D$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$

- a) Ein Punkt  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  heißt **innerer Punkt** von  $D$ , wenn es eine  $r$ -Umgebung von  $\mathbf{a}$  gibt, die ganz in  $D$  enthalten ist.
- b)  $D$  ist **offen**, wenn jeder Punkt von  $D$  ein innerer Punkt ist.
- c) Ein Punkt  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Randpunkt** von  $D$ , wenn jede  $r$ -Umgebung von  $\mathbf{b}$  sowohl mindestens einen Punkt aus  $D$  als auch mindestens einen nicht zu  $D$  gehörenden Punkt enthält. Die Menge aller Randpunkte von  $D$  heißt **Rand von  $D$**  und wird mit  $\partial D$  bezeichnet.
- d) Eine Menge heißt **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Bsp.:  $K = \{(x, y); x^2 + y^2 < r^2\}$  ist eine offene Menge.

Analog zur Beschränktheit im  $\mathbb{R}^1$  gilt im  $\mathbb{R}^n$ :

**Definition 2** a) Eine Menge  $D \in \mathbb{R}^n$  heißt **beschränkt**, wenn es eine Konstante  $K > 0$  gibt mit

$$|\mathbf{x}| < K \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

- b) Die abgeschlossenen und beschränkten Mengen des  $\mathbb{R}^n$  nennt man **kompakt**.

### 2.2 Stetigkeit

Nun können wir die Stetigkeit im  $\mathbb{R}^n$  analog zum  $\mathbb{R}^1$  definieren:

**Definition 3** Sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{a} \in D \cup \partial D$ .

- a)  $f$  hat in  $\mathbf{a}$  den **Grenzwert**  $c \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke  $\epsilon > 0$  eine  $r$ -Umgebung  $U_r(\mathbf{a})$  gibt, so dass  $|f(\mathbf{x}) - c| \leq \epsilon$  für alle  $\mathbf{x} \in D \cap \partial U_r(\mathbf{a})$  gilt.

### 3 Partielle Differentiation

b)  $f$  heißt in  $\mathbf{a} \in D$  **stetig**, wenn  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$  gilt.

c)  $f$  heißt auf  $D$  **stetig**, wenn  $f$  in allen  $\mathbf{a} \in D$  stetig ist.

Weiterhin gilt:

Summen, Produkte, Quotienten stetiger Funktionen sind stetig.

Achtung! Die Stetigkeit von  $f(x, y)$  in  $(x_0, y_0)$  ergibt sich noch nicht aus der Stetigkeit von  $f(x, y_0)$  und  $f(x_0, y)$ .

Bsp.: Parabelfalte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Hier sind  $f(x, 0) = 0$ ,  $f(0, y) = 0$  und  $f(tu, tu) = \frac{2tuw^2}{u^2+t^2v^4}$  sind stetig. Aber für  $y > 0$  ist  $f(x, y)$  auf der Parabel  $x = y^2$  konstant 1. Daher ist  $f$  unstetig in  $(0, 0)$ . ...Parabelfalten....

## 3 Partielle Differentiation

Die partielle Differentiation einer Funktion in mehreren Variablen betrachtet die Änderung dieser Funktion nach nur einer Variablen. Anschaulich ist sie die Richtungsableitung längs den Koordinatenachsen. Es gilt:

$$\boxed{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t}} \quad (1)$$

Andere Schreibweisen sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x$$

Eine Funktion  $f$  heißt partiell differenzierbar (bzw. stetig partiell differenzierbar), wenn alle ihre partiellen Ableitungen  $f_{x_i}$  existieren (und stetig sind).

$f$  heißt zweimal (k-mal) partiell differenzierbar, wenn alle zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$  (alle k-ten Ableitungen  $f_{x_i \dots x_k}$ ) existieren. Sind alle Ableitungen stetig heißt die Funktion k-mal stetig partiell differenzierbar. Man schreibt:

$$\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ k-mal stetig partiell differenzierbar}\}$$

Für  $k=0$  ist  $f$  stetig.

### 3.1 Satz von Schwarz

**Satz 1 (Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitung)**

Für jede  $\mathcal{C}^2$ -Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, gilt:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)} \quad (2)$$

Achtung! Die Funktionen müssen 2-mal **stetig** partiell differenzierbar sein, sonst gilt der Satz von Schwarz i.A. nicht.

### 3.2 Der Gradient

Die partiellen Ableitungen einer Funktion kann man zu dem Gradienten zusammenfassen:

$$\boxed{\text{grad} f(\mathbf{x}) = \vec{\nabla} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n}$$

Der Gradient zeigt in Richtung des größten Anstiegs.

### 3.3 Die Kettenregel

Hängt der Vektor  $\mathbf{x}$  von einem kontinuierlichem Parameter  $t$  ab, also  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , so beschreibt dies eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$ . Die Änderung der Funktion  $f$  entlang dieser Kurve lässt sich wie folgt berechnen:

**Satz 2 (Die Kettenregel)** Für jede  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und für jedes Krüvenstück  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow D$  gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f_{x_1}(\mathbf{x}(t))x_1'(t) + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}(t))x_n'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} \quad (3)$$

Mit der Kettenregel kann man zeigen, dass der Gradient immer senkrecht auf Niveauflächen steht. Die Niveauflächen einer Funktion  $f$  sind definiert durch:

$$N_c := \{\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n; f(\mathbf{x}) = c\}; c \in \mathbb{R}$$

Für **alle** Kurven  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , die in der Niveaufläche  $N_c$  liegen gilt:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \frac{d}{dt} c = 0 = \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$$

D.h. der Gradient von  $f$  ist orthogonal zu allen Kurventangenten und somit orthogonal zu der Niveaufläche  $N_c$

### 3.4 Die Richtungsableitung

Wie wir eben festgestellt haben beschreibt die partielle Ableitung einer Funktion  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$  die Änderung der Funktionswerte entlang der Koordinatenachse  $\mathbf{e}_i$ . Möchte man die Änderung bzgl. einer bestimmten Richtung  $\mathbf{v}$  berechnen benötigt man die Richtungsableitung. Mit  $h(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  ist  $\frac{d}{dt}h(0)$  diese Richtungsableitung und mithilfe der Kettenregel ergibt sich:

**Satz 3** Für jede auf der offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  total differenzierbare Funktion  $f$  (insbesondere für  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ ) und für jeden Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} \neq 0$ , gilt:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}) v_i \quad (4)$$

Mit  $|\mathbf{v}| = 1$  stellt (4) die Richtungsableitung (bzw. den Anstieg) von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung  $\mathbf{v}$  dar.

## 4 Totales Differential

Oft ist es notwendig die Funktion  $f(\mathbf{x})$  an einem Punkt  $P = (x_0, y_0)$  zu approximieren. Im Fall  $\mathbb{R}^2$ , d.h.  $z = f(x, y)$  kann man sich diese Approximation als Tangentialebene an den Punkt  $P$  vorstellen. Im folgenden werden wir das totale Differential für diesen Fall herleiten. Es lässt sich jedoch ohne weiteres auf den  $\mathbb{R}^n$  erweitern.

Eine Tangentialebene  $t(x, y)$  hat die Form:

$$z = ax + by + c = t(x, y)$$

Da die Ebenen durch den Punkt  $P$  gehen soll und außerdem die Steigung an diesem Punkt approximiert werden soll, muss gelten

$$z_0 = ax_0 + by_0 + c; \quad f_x(x_0, y_0) = a; \quad f_y(x_0, y_0) = b$$

und man erhält

$$(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Geht man nun in die infinitesimalschreibweise über ( $(x - x_0) \rightarrow \Delta x \rightarrow dx$ ) erhält man:

**Satz 4 (Totales Differential)** Die Funktion  $f(\mathbf{x})$  sei in  $\mathbf{x}_0$  nach allen Variablen  $x_i$  differenzierbar. Dann nennt man

$$dz = f_{x_1}(\mathbf{x}_0) dx_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0) dx_n \quad (5)$$

totales Differential der Funktion  $f(\mathbf{x})$  in  $\mathbf{x}_0$  und  $f(\mathbf{x})$  ist in  $\mathbf{x}_0$  total differenzierbar.

Mit  $z_0 = f(\mathbf{x}_0)$  und  $z \approx f(\mathbf{x})$  erhält man außerdem die lineare Approximation von  $f(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (6)$$

## 5 Taylorentwicklung

Die Taylorentwicklung von Funktionen einer Variablen ist bereits bekannt. Diese lässt sich auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern. Hierzu betrachtet man für ein  $\mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$  die Funktion einer reellen Veränderlichen  $h(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$  mit  $0 < t < 1$  und setzt voraus, dass  $D$  konvex ist (d.h.  $D$  ist offen und jede Gerade durch zwei Punkte die in  $D$  liegen, liegt auch in  $D$ ).

Wir entwickeln nun die Funktion  $h(t)$  um  $t_0 = 0$ . Wir werden nur den Term erster Ordnung berechnen, der Term zweiter Ordnung etc. folgt analog. Zunächst bilden wir die Ableitung nach  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \frac{\partial f}{\partial(x_1 + tv_1)} \cdot \frac{d(x_1 + tv_1)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial(x_2 + tv_2)} \cdot \frac{d(x_2 + tv_2)}{dt} + \dots = \frac{\partial f}{\partial(x_1 + tv_1)} \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial(x_2 + tv_2)} \cdot v_2 + \dots \\ \dot{h}(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot v_2 + \dots = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Werten wir  $h$  nun an der Stelle 1 aus ergibt sich:

$$h(1) = h(0) + \dot{h}(0) \cdot 1 + \dots$$

Und mit  $h(1) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})$ ,  $h(0) = f(\mathbf{x}_0)$  und  $\dot{h}(0) = \text{grad}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$  ergibt sich:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} + \dots$$

Mit  $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  kann man die Taylorentwicklung einer Funktion angeben:

**Satz 5 (Taylorformel für n Variablen)** Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein konvexes Gebiet,  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{x} \in D$ , dann gilt:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad}f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots + \frac{1}{k!} \partial_{\mathbf{v}}^k f(\mathbf{x}_0) + R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (7)$$

mit dem Restglied

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(k+1)!} \partial_{\mathbf{v}}^{k+1} f(\mathbf{x} + \xi_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$$

un einer Zahl  $\xi_k$  zwischen 0 und 1  $\left( \partial_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \frac{\partial}{\partial x_{0,i}} \right)$

Hierbei ist  $H_f(\mathbf{x})$  die *symmetrische* HESSE-Matrix:

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla f(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \nabla f(\mathbf{x}) \right) \quad (8)$$

von  $f$  am Punkt  $\mathbf{x}$ .

## 6 Extremwertberechnung

Mithilfe der Taylorentwicklung (bzw. der Tangentialebene) können nun Extremwerte berechnet werden. Eine Extremstelle am Punkt  $\mathbf{a} \in D$  liegt dann vor, wenn es eine  $r$ -Umgebung  $U_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$  mit:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \text{bzw.} \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$$

Für  $z = f(x, y)$  bedeutet dies, dass die Tangentialebene parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene ist. Damit eine Extremstelle vorliegt muss also die Änderung der Funktion nach allen Koordinatenachsen verschwinden, d.h.

**Satz 6 (Lokale Extrema im Inneren von  $D$ )** Ist  $f$  auf  $U_r(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion, so gilt

$$\boxed{\mathbf{a} \text{ ist lokale Extremstelle von } f \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = 0} \quad (9)$$

$\nabla f(\mathbf{a}) = 0$  ist also **notwendige** Bedingung, dass ein inneres Extremum vorliegt und  $\mathbf{a}$  nennt man **stationären** oder **kritischen** Punkt

Um nun zu untersuchen, ob es sich um ein Maxima, Mimina oder Sattelpunkt handelt betrachtet man die nächste Ordnung der Taylorentwicklung - d.h. die Hesse-Matrix. Am stationären Punkt gilt:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \underbrace{\text{grad}f(\mathbf{a})}_{=0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Und man erhält in der Umgebung von  $\mathbf{a}$ :

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Da  $H_f(\mathbf{a})$  nach dem Satz von Schwarz symmetrisch ist lässt sie sich mit einer orthogonalen Transformation ( $H_f(\mathbf{a}) = O \Lambda O^T$  mit  $\Lambda$  diagonal) diagonalisieren. Mit der Koordinatentransformation  $z = O^T(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  (bzw.  $z^T = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T O$ ) erhält man:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T O}_{=z^T} \Lambda \underbrace{O^T (\mathbf{x} - \mathbf{a})}_{=z} = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

Sind alle EW'e positiv ( $\Leftrightarrow H_f(\mathbf{a})$  ist positiv definit), folgt  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ , d.h.  $\mathbf{a}$  ist ein lokales Minima. Entsprechend formuliert man für negativ definit und indefinit:

**Satz 7 (Extremstellen-Test für  $n$  Variablen)** Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{a} \in U$  ein stationärer Punkt einer Funktion  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  und  $H_f(\mathbf{a})$  die Hesse-Matrix von  $f$  in  $\mathbf{a}$ , dann gilt:

- |  |
|--|
| <p>a) <math>H_f(\mathbf{a})</math> positiv definit <math>\Rightarrow \mathbf{a}</math> ist lokales Minimum</p> <p>b) <math>H_f(\mathbf{a})</math> negativ definit <math>\Rightarrow \mathbf{a}</math> ist lokales Maximum</p> <p>c) <math>H_f(\mathbf{a})</math> indefinit <math>\Rightarrow \mathbf{a}</math> ist Sattelpunkt</p> |
|--|

## 6 Extremwertberechnung

Im  $\mathbb{R}^2$  kann man das durch die Determinate ausdrücken:

**Nur für  $n=2$  gilt:**

- a)  $\det H_f(\mathbf{a}) > 0, f_{xx}(\mathbf{a}) > 0 \Rightarrow \mathbf{a}$  ist lokales Minima
- b)  $\det H_f(\mathbf{a}) > 0, f_{xx}(\mathbf{a}) < 0 \Rightarrow \mathbf{a}$  ist lokales Maxima
- c)  $\det H_f(\mathbf{a}) < 0 \Rightarrow \mathbf{a}$  ist Sattelpunkt
- d)  $\det H_f(\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow$  keine Aussage möglich

Extremwertberchnung für  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ :

1. **Stationäre** Punkte  $\mathbf{a}_i$  berechnen:

$$\nabla f(\mathbf{a}_i) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_i$$

2. Stationäre Punkte durch  $H_f(\mathbf{a}_i)$  charakterisieren (siehe oben).
3. Extrema auf Rand und Eckpunkten bestimmen (Vorlesung am Dienstag).