Probeklausur – Musterlösungen

Ferienkurs Ana I, SoSe 2008
Florian Beye

1. a)
i) <u>Falsch</u>: Gegenbeispiel:

$$a_k = \begin{cases} 1 & : k = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \Big\} \text{ konvergiert gegen } 0.$$

$$b_k = \begin{cases} 1 & : k \text{ gerade} \\ 2 & : k \text{ ungerade} \end{cases} \Big\} \text{ hat Werte aus } \mathbb{N}$$

$$a_{b_k} = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \quad \text{divergiert.}$$

ii) <u>Falsch</u>: Wie der $\mathbb{R}$, so ist auch $\mathbb{C}$ vollständig.

iii) <u>Richtig</u>: Dies ist die Umkehrung des Folgenkriteriums für die Stetigkeit, welche im $\mathbb{R}$ gilt. (Gilt i.A. auch für jeden metrischen Raum.)

b)
i) <u>Richtig</u>: Siehe Satz aus der Vorlesung.

ii) <u>Falsch</u>: Die Reihenglieder der Fourier-Reihe sind alle stetig, die Grenzfunktion kann aber auch Unstetigkeitsstellen besitzen. (zB Sägezahnfunktion)

iii) <u>Richtig</u>: Dies ist das Cauchy-Kriterium angewandt auf Funktionenfolgen. Da das N hier nicht vom x abhängen kann, handelt es sich um ein Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

2. Untersuche $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\underbrace{\ln(1+\frac{1}{n})}_{>0}} \underset{n\to\infty}{=} \exp\left[\frac{1}{n}\ln\ln(1+\frac{1}{n})\right]$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{\underset{n\to\infty}{=}} \exp\left[\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-1}{n^2}\right] \underset{n\to\infty}{=} \exp\left[-\frac{\frac{1}{n^2+n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right]$$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{\underset{n\to\infty}{=}} \exp\left[-\frac{\frac{2n+1}{(n^2+n)^2}}{\frac{1}{n^2+n}}\right] \underset{n\to\infty}{=} \exp\left[-\underbrace{\frac{2n+1}{n^2+n}}_{\to 0}\right] = e^0 = 1.$$

es lässt sich also keine Aussage über die Konvergenz der Reihe treffen.

3. a)

Da $\sin x < x$ für $x > 0$ gilt auch $\sin\frac{1}{k} < \frac{1}{k}$

Damit haben wir eine konvergente Majorante mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{k}\right)^2 < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty .$$

b)

z.B Quotientenkrit.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} \underset{n\to\infty}{=} \frac{3\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\underset{n\to\infty}{=} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{①}{\underset{n\to\infty}{=}} 3\exp\left[n\ln\frac{n}{n+1}\right] \underset{n\to\infty}{=} 3\exp\left[\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right]$$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{\underset{n\to\infty}{=}} 3\exp\left[-n^2\,\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right] \underset{n\to\infty}{=} 3\exp\left[-\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\right] = 3e^{-1}$$

$$= \frac{3}{e} > 1 \text{ also divergent.}$$

① hier kann man auch $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ verwenden.

4.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n+1} = \frac{A(n^2-1) + Bn(n+1) + Cn(n-1)}{n(n^2-1)}$$

$\Rightarrow$ I) $A = -1$

II) $B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$

III) $A + B + C = 0 \Leftrightarrow -1 + 2B = 0 \Rightarrow B = +\frac{1}{2}$ und $C = +\frac{1}{2}$

Also.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\right)$$

k-te Partialsumme

$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\right) = -\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n-1}$$

Indexshifts

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \sum_{n=3}^{k-1}\frac{1}{n}}_{1.\ \text{Summe}} + \underbrace{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k-1}}_{2.\ \text{Summe}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k-1}\frac{1}{n}}_{3.\ \text{Summe}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} +$$

$$\sum_{n=3}^{k-1}\left(\underbrace{-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{0}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}.$$

Also $S_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$ und $\lim_{k\to\infty} S_k = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$

5a)

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 x^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x\Big|_0^1 - \frac{4}{9}x^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0} x^{3/2}\ln x}_{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-3/2}} = \text{l'Hospital} = 0} = -\frac{4}{9}$$

b)

$$\int_0^2 \frac{x+4}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^2 \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx + \int_0^2 \frac{3}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \left[\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1}\right]_0^2 = \ln 3 - 3\cdot\left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \ln 3 + 2.$$

c)

Da $\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} > \sqrt{x}$ für $x>0$ hat $\int_2^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

mit $\int_2^\infty \sqrt{x}\,dx$ eine divergente Minorante, also

divergiert das Integral.

6. Ja, wegen

$$\lim_{x\to 0} x\cot x \underset{x\to 0}{=} \frac{\cot x}{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\overset{\text{l'Hospital}}{=}} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{=} \Big(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1}\Big)^2 = \underline{\underline{1}}$$

Also $f(0) := 1$

Die Ableitung beträgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \underset{h\to 0}{=} \frac{h\coth h - 1}{h} \underset{h\to 0}{=} \coth \cancel{+} \frac{h}{\sin^2 h}$$

$$\underset{h\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}\sin 2h + h}{\sin^2 h} \underset{h\to 0}{\overset{\text{l'Hospital}}{=}} \frac{\cos 2h \cancel{+} 1}{\sin 2h} \underset{h\to 0}{\overset{\text{l'Hospital}}{=}} \frac{-2\sin 2h}{2\cos 2h}$$

$$\underset{h\to 0}{=} -\tan 2h = \underline{\underline{0}}$$

7. Quotientenkrit.

$$\lim_{n\to 0} \left| \frac{(-1)^{n+1}(2n+2)!\,x^{n+1}}{(1-2n-2)\,((n+1)!)^2\,4^{n+1}} \; \frac{(1-2n)((n)!)^2\,4^n}{(-1)^n\,(2n)!\,x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to 0} \left| \frac{+x\,(2n+2)(2n+1)\,(1-2n)}{4\,(+1+2n)(n+1)^2} \right| = \lim_{n\to 0} |x| \left| \frac{(2n+2)(1-2n)}{4\,(n+1)^2} \right|$$

$$\underset{n\to 0}{=} |x| < 1$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius ist 1.

Die lineare Näherung ist $1 + \frac{1}{2}x$

zu zeigen: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$

$$\Rightarrow 1 + x < 1 + x + \underbrace{\frac{1}{4}x^2}_{>0}$$

wenn $x > -1$ dann auch

$$1 + x < 1 + x + \frac{1}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{1+x}_{>0}} < 1 + \frac{1}{2}x \quad ✓$$

V

8. Zuerst Matrix Jordanisieren:

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, jeweils zweifach.
(Dies folgt aus der unteren Dreiecksgestalt)

Wir definieren mit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = A - \lambda_1 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $N_2 = A - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\ker N_1 = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}} \rangle$, $\dim \ker N_1 = 2 =$ Alg. Vielfachheit λ_1

Also haben wir mit v_1 und v_2 Eigenvektoren.

$\ker N_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ $\dim \ker N_2 = 1$

$$N_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker N_2^2 = \ker N_2 \oplus \langle \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle$

$\dim \ker N_2 = 2 =$ Alg Vielfachheit von λ_2

mit $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $v_4 = N v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit Transformationsmatrix $S = (v_1, v_2, v_4, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

und Jordanmatrix $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

zu 8)

Damit ist mit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = e^{(N+D)t} = e^{Nt} \cdot e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $e^{Dt} = \mathbb{1} + Dt$

Also

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

und

$$X = Se^{Jt} a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{2t} \\ e^t & 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} a$$

mit $a \in \mathbb{R}^4$