Repetitorium Analysis I für Physiker

Probeklausur

1. Wissensabfragen **(2 Punkte)**

   (a) Welche dieser Aussagen über eine Folge (a_k) sind richtig?

   i. Konvergiere (a_k) und sei (b_k) eine Folge mit Werten aus den natürlichen Zahlen. Dann konvergiert auch die Folge (a_{b_k})

   ii. Die a_k seien aus $\mathbb{C}$ und (a_k) sei eine Cauchy-Folge. Dann konvergiert die Folge (a_k) nicht.

   iii. Es sei $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. Ist $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt a stetig, so gilt $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(a)$ und umgekehrt.

   (b) Welche der folgenden Aussagen über Funktionenfolgen und Funktionenreihen sind richtig?

   i. Sei (f_n) eine gleichmässig konvergente Funktionenfolge und seien die (f_n) stetig in $\mathbb{R}$. Dann ist auch $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ stetig.

   ii. Fourier-Reihen konvergieren immer gleichmässig.

   iii. Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent in $D \subseteq \mathbb{R}$, wenn gilt

   $$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

2. Kann mit dem Wurzelkriterium eine Aussage über die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + n^{-1})$ getroffen werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3 Punkte)**

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. **(6 Punkte)**

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{k}\right)^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

4. Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}$. **(6 Punkte)**

5. Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie ggf. deren Werte. **(8 Punkte)**

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln x dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+4}{(x+1)^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$

6. Mit welchem Wert ist die Funktion $f : x \mapsto x\cot x$ in $x_0 = 0$ stetig fortsetzbar? **(4 Punkte)**
   Ist die stetig fortgesetzte Funktion in x_0 differenzierbar? Wenn ja, wie lautet der Wert der Ableitung dieser Stelle?

7. Die Taylorreihe der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ um den Entwicklungspunkt Null lautet **(4 Punkte)**

   $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n}x^n .$$

   Bestimmen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums den Konvergenzradius der Reihe. Zeigen Sie, dass die lineare Näherung die Funktion f nach oben abschätzt.

8. Bestimmen Sie die Lösungen x der folgenden linearen Differentialgleichung: **(7 Punkte)**

   $$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x$$