## Ferienkurs Analysis I SS08

# Freitag – Integration

### Musterlösung der Aufgaben

## 1 Potenzreihen

### Aufgabe 1.1

a) Zeigen Sie die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t}$$

und berechnen Sie ihn.

## Lösung:

Die Funktion $g(t) = \ln \frac{1}{1-t}$ ist im Intervall $]-\infty, 1[$ definiert und differenzierbar. Der Wert der Ableitung ist $g'(t) = (1-t) \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-t}$. Hieraus folgt insbesondere Existenz und Wert von

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t} \;=\; g'(0) \;=\; 1\,.$$

Alternativ: Mit l'Hospital geht's auch.

b) Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \;=\; \int_0^x \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t}\, dt\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

## Lösung:

Aus der geometrischen Reihe ergibt sich $g'(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Integration über $x \in ]-1, 1[$ liefert folglich $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{x} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. Nochmalige Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe auf kompakten Teilintervallen von $]-1, 1[$ bringt nach gliedweiser Integration die Behauptung

$$\int_0^x \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t}\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Alternativ: Zeigen, dass die beiden Ausdrücke dieselbe Ableitung und denselben Wert bei 0 haben.

### Aufgabe 1.2

a) Zeigen Sie mithilfe der Potenzreihen des Sinus bzw. Sinushyperbolicus die folgenden Identitäten:

$(\sin x)' = \cos x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

## Lösung:

Die Potenzreihe des Sinus lautet: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1!}$

Wir dürfen Potenzreihen ohne weiteres gliedweise differenzieren und erhalten:

$(\sin x)' = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!})' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k (2x+1) \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$

Für die Funktion $\sinh x$ gehen wir gleichermaßen vor.
$(\sinh x)' = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!})' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2x+1) \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_k$ der Potenzreihe zur Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

## Lösung:

Wir verwenden die Binomialreihe.
$f(x) = \sqrt{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ k \end{pmatrix} x^{2k}$
$\Longrightarrow a_k = \begin{pmatrix} 1/2 \\ k \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!2^k} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (1-2i)$

## 2 Integration

**Aufgabe 2.1** *Unbestimmte Integrale*

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \mathrm{d}x \ \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \qquad u := \sqrt{x} \ ; \ \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2\int \mathrm{d}x \ \sin u = -2\cos u = -2\cos\sqrt{x}$$

---

$$\int \mathrm{d}x \ x^2\sqrt{x^3+1} = \qquad u := x^3+1 \ ; \ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \mathrm{d}u \ \sqrt{u} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}$$

---

$$\int \mathrm{d}x \ \frac{1}{2x^2-4x+10} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \ \frac{1}{(x-1)^2+4} = \qquad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$= \frac{1}{8}\int \mathrm{d}x \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \qquad u := \frac{x-1}{2} \ ; \ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}u \ \frac{1}{u^2+1} = \frac{1}{4}\arctan u = \frac{1}{4}\arctan\frac{x-1}{2}$$

---

$$\int \mathrm{d}x \ \frac{1}{x(1-2x)} \quad \text{Hinweis: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.}$$

Ansatz:

$$\frac{1}{x(1-2x)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}} \qquad \Big| \ \cdot x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = A\left(x-\frac{1}{2}\right) + Bx = -\frac{1}{2}A + x(A+B) \qquad \text{Koeffizientenvergleich}$$

$$\Rightarrow \ A = 1 \ , \ B = -1$$

$$\int \mathrm{d}x \ \frac{1}{x(1-2x)} = \int \mathrm{d}x \ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}} = \ln|x| - \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| = \ln\left|\frac{x}{x-\frac{1}{2}}\right|$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \frac{1}{\cos x} = \int \mathrm{d}x\ \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} = \int \mathrm{d}x\ \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2})} = \qquad u := \tan\frac{x}{2}\ ;\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \mathrm{d}u\ \frac{2}{1-u^2} = \int \mathrm{d}u\ \frac{1+u+1-u}{(1+u)(1-u)} = \int \mathrm{d}u\ \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} =$$

$$= -\ln|1-u| + \ln|1+u| = \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \ln\left|\frac{1+2u+u^2}{1-u^2}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{1+2\tan\frac{x}{2}+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \cos x = \qquad \text{p.I: } u = \cos x\ ;\ v' = \mathrm{e}^x$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \sin x = \qquad \text{p.I: } u = \sin x\ ;\ v' = \mathrm{e}^x$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \cos x \qquad \text{Auflösen nach } \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^x \cos x$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \cos x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ |x| \geq 1 \qquad \text{Hinweis}$$

$$= \int \mathrm{d}x\ \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}} = \int \mathrm{d}x\ \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \qquad u := x + \sqrt{x^2-1}$$

$$= \int \mathrm{d}u\ \frac{1}{u} = \ln|u| = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \qquad \mathrm{d}u = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \qquad x =: \sinh u\ ; \mathrm{d}x = \cosh u \mathrm{d}u$$

$$= \int \mathrm{d}u\ \frac{\cosh u}{\sqrt{\sinh^2 u + 1}} = \int \mathrm{d}u \frac{\cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u}} = \int \mathrm{d}u = u = \operatorname{arsinh} x$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \sin^9 x = \int \mathrm{d}x\ \sin x \left(1-\cos^2 x\right)^4 = \qquad u := \cos x\ ,\ \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$$

$$= -\int \mathrm{d}u\ (1-u^2)^4 = -\int \mathrm{d}u\ 1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8 =$$

$$= -u + \frac{4}{3}u^3 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{4}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9 =$$

$$= -\cos x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{6}{5}\cos^5 x + \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^x = \int \mathrm{d}x\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x^2+x} = \qquad u := x^2 + x\ ,\ \mathrm{d}u = 2x+1$$

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}u\ \mathrm{e}^u = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^u = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2+x}$$

---

$$\int \mathrm{d}x\ \sin x \cos x = \qquad \text{p.I: } u = \sin x\ ,\ v' = \cos x$$

$$= \sin^2 x - \int \mathrm{d}x\ \cos x \sin x \qquad \text{Auflösen nach } \int \mathrm{d}x\ \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}x\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

**Aufgabe 2.2** *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie folgende Integrale:

(i)

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\ \sin^2 x$$

**Lösung:**

$\cos^2 x$ und $\sin^2 x$ sind $\pi$-periodisch, denn es gilt $\cos^2(x+\pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$, analog für den Sinus. Über die Periode $\pi$ integriert gilt wegen der Translationssymmetrie von Sinus und Cosinus:

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \cos^2 x = \int_0^\pi \mathrm{d}x \sin^2 x$$

Damit gilt:

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \sin^2 x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}x\ \cos^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}x\ 1 = \frac{\pi}{2}$$

(ii)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos x(\cos x \sin x + x)$$

**Lösung:**

Wir untersuchen den Integranden auf Symmetrieen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \underbrace{\cos x}_{\text{gerade}}(\underbrace{\cos x \sin x}_{\text{ungerade}} + \underbrace{x}_{\text{ungerade}}) = 0$$

Der Integrand ist eine ungerade Funktion, daher verschwindet das Integral.

**Aufgabe 2.3** *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert:

$$\int_1^\infty \mathrm{d}x\ \frac{x^3}{x^4+1} \lim_{a\to\infty} = \frac{1}{4}\int_1^a \mathrm{d}x\ \frac{4x^3}{x^4+1} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{4}\Big[\ln\left(x^4+1\right)\Big]_1^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \ln(a^4+1) - \ln 2 \longrightarrow +\infty$$

---

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sinh x}$$

für $x \geq 0$ gilt:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \leq x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = x\cosh x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sinh x} \geq \int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{x\cosh x} \geq \int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{x\cosh 1} = \frac{1}{\cosh 1}\int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$$

---

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{1}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b \mathrm{d}x\ \frac{1}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \arctan b - \arctan a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

---

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{1+|x|} = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{1+x} = 2\ln(1+x)\Big|_0^\infty \longrightarrow +\infty$$

---

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \; x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \qquad \text{p.I: } u = x^2 \;,\; v' = \mathrm{e}^{-x}$$

$$= \underbrace{-x^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \mathrm{d}x \; 2x\,\mathrm{e}^{-x} = \qquad \text{p.I: } u = 2x \;,\; v' = \mathrm{e}^{-x}$$

$$= \underbrace{-2x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} +2\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x} = 2\left[-\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty = 2$$

**Aufgabe 2.4** *Majorantenkriterium*

(i) Zeigen Sie, dass durch $d(x) := x - \frac{\pi}{2}\cdot\sin x$ auf $[0,\pi/2]$ eine konvexe Funktion gegeben ist und folgern Sie daraus die Abschätzung $\sin x \geq 2x/\pi$ für $0 \leq x \leq \pi/2$.

(ii) Beweisen Sie nun die Existenz des Integrals

$$I = \int_0^\pi \mathrm{d}x \;\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

**Lösung:**

(i) $d(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $d'(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos x$ und $d''(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$. Es gilt: $d''(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt: $d'(x)$ ist monoton wachsend auf $[0,\frac{\pi}{2}]$. Damit ist $d(x)$ konvex auf $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Mit $d(0) = d(\frac{\pi}{2}) = 0$ und der Konvexität folgt: $d(x) \leq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Das ist gleichbedeutend mit $\sin x \geq 2x/\pi$.

(ii) Nach (i) gilt auf $]0,\pi/2]$ die Abschätzung

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq 1 \quad\Rightarrow\quad 1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \frac{\pi}{2x}$$

Wegen der Monotonie des Logarithmus folgt:

$$0 \leq \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) \leq \ln\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

Nach dem Majorantenkriterium muss die Existenz von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \;\ln\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

gezeigt werden:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \;\ln\left(\frac{\pi}{2x}\right) \overset{\text{p.I.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x\ln\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\;1 = \ln 1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\pi}{2} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2}$$

Damit ist das Majorantenkriterium erfüllt und somit die Existenz des Integrals $I$ bewiesen.

**Aufgabe 2.5** *Dominierte Konvergenz*

(i) Wo liegt der Fehler?
Die Funktionenfolge $f_n$ sei auf $[0,1]$ folgedermaßen definiert:

$$f_n = (n+1)x^n$$

$f_n$ konvergiert $v_1$-fast-überall (nämlich überall außer in $x = 1$) gegen

$$f = 0$$

Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left[x^{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x \; f_n = \int_0^1 \mathrm{d}x \; f = 0$$

**Lösung:**

Der Satz über dominierte Konvergenz verlangt eine Integrable Funktion $g$, sodass $|f_n| \leq g \; \forall n$. Eine derartige Funktion gibt es jedoch nicht. Daher darf der Satz hier nicht angewendet werden.

(ii) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \mathrm{d}t \; \sqrt{\frac{t}{n}} \sin\left(\sqrt{\frac{n}{t}}\right) = 0$$

**Lösung:**

$$f_n(t) := \sqrt{\frac{t}{n}} \sin\left(\sqrt{\frac{n}{t}}\right) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, v_1) \text{ konvergiert punktweise gegen } f(t) := 0$$

Außerdem gilt:

$$|f_n(t)| \leq \sqrt{\frac{n}{t}} \leq 1 =: g(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, v_1) \; \forall n$$

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz über dominierte Konvergenz erfüllt, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \mathrm{d}t \; \sqrt{\frac{t}{n}} \sin\left(\sqrt{\frac{n}{t}}\right) = \int_0^\pi \mathrm{d}t \; f(t) = 0$$