Ferienkurs Analysis I SS08

Freitag – Integration

Aufgaben

1 Potenzreihen

Aufgabe 1.1

a) Zeigen Sie die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t}$$

und berechnen Sie ihn.

b) Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t}\, dt\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

Aufgabe 1.2

a) Zeigen Sie mithilfe der Potenzreihen des Sinus bzw. Sinushyperbolicus die folgenden Identitäten:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k der Potenzreihe zur Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

2 Integration

Aufgabe 2.1 *Unbestimmte Integrale*

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\int \mathrm{d}x \; x^2\sqrt{x^3+1}$$

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{1}{2x^2-4x+10}$$

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{1}{x(1-2x)} \quad \text{Hinweis: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.}$$

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{1}{\cos x}$$

$$\int \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^x \cos x$$

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \;, \; |x| \geq 1 \quad \text{Hinweis: Erweitern Sie den Integranden mit } x+\sqrt{x^2-1}.$$

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \mathrm{d}x \; \sin^9 x$$

$$\int \mathrm{d}x \; \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^x$$

$$\int \mathrm{d}x \; \sin x \cos x$$

Aufgabe 2.2 *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie folgende Integrale:

(i)

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \; \sin^2 x$$

(ii)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; \cos x(\cos x \sin x + x)$$

Aufgabe 2.3 *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert:

$$\int_1^\infty \mathrm{d}x \; \frac{x^3}{x^4+1}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \; \frac{1}{\sinh x}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \; \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \; \frac{1}{1+|x|}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \; x^2\, \mathrm{e}^{-x}$$

Aufgabe 2.4 *Majorantenkriterium*

(i) Zeigen Sie, dass durch $d(x) := x - \frac{\pi}{2} \cdot \sin x$ auf $[0, \pi/2]$ eine konvexe Funktion gegeben ist und folgern Sie daraus die Abschätzung $\sin x \geq 2x/\pi$ für $0 \leq x \leq \pi/2$.

(ii) Beweisen Sie nun die Existenz des Integrals

$$I = \int_0^\pi \mathrm{d}x \; \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

Aufgabe 2.5 *Dominierte Konvergenz*

(i) Wo liegt der Fehler?
Die Funktionenfolge f_n sei auf $[0, 1]$ folgedermaßen definiert:

$$f_n = (n+1)x^n$$

f_n konvergiert v_1-fast-überall (nämlich überall außer in $x = 1$) gegen

$$f = 0$$

Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left[x^{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x \; f_n = \int_0^1 \mathrm{d}x \; f = 0$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \mathrm{d}t \; \sqrt{\frac{t}{n}} \sin\left(\sqrt{\frac{n}{t}}\right) = 0$$