Technische Universität München

Thomas Reifenberger | Analysis I
Übungsblatt 4
Lösungen

Repetitorium Analysis I für Physiker

1 Multiple Choice

Aufgabe 1.1 *Lösungen der homogenen Gleichung*

Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen der homogenen Gleichung

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

Dann sind folgende Funktionen ebenfalls Lösungen:

	Richtig	Falsch
$x_1(t) - x_2(t)$	☒	☐
$x_1(t)x_2(t)$	☐	☒
$x_1(0)x_2(0)$	☐	☒
$x_1(t)x_2(0) + x_1(0)x_2(t)$	☒	☐
$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	☒	☐

Aufgabe 1.2 *Lösungen der inhomogenen Gleichung*

Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$$

Dann sind folgende Funktionen ebenfalls Lösungen:

	Richtig	Falsch
$x_1(t) - x_2(t)$	☐	☒
$x_1(t) - x_2(t) + b(t)$	☐	☒
$2x_1(t) - x_2(t)$	☒	☐
$x_1(t)b(t)$	☐	☒

2 Matrixexponential

Aufgabe 2.1 *Matrixexponential*

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion:

(i) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Dann gilt:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B$$

Lösung:

$$e^A\, e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{A^{n-m}}{(n-m)!}\frac{B^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} A^{n-m}B^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = e^{A+B}$$

(ii) Sei S invertierbar. Dann ist

$$e^A = S\, e^{S^{-1}AS}\, S^{-1}$$

Lösung:

$$S\, e^{S^{-1}AS}\, S^{-1} = S\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^n}{n!}\right) S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S \cdot \overbrace{S^{-1}AS \cdot S^{-1}AS \ldots S^{-1}AS}^{n \text{ mal}} \cdot S^{-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A$$

(iii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, e^{At} = A\, e^{At}$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, e^{At} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{A^n t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} A\frac{A^n t^n}{n!} = A\, e^{At}$$

Aufgabe 2.2

Berechnen Sie explizit (ohne den Satz aus der Vorlesung) den Wert von:

$$e^{At} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$e^{At} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}\, e^{Nt} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = e^{\lambda t}\, \mathbb{1}_3 \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0_3$$

$$e^{Nt} = \left(\underbrace{N^0}_{\mathbb{1}_3} + N^1 t + \frac{N^2 t^2}{2} + \underbrace{\frac{N^3 t^3}{3!} + \ldots}_{=0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \mathbb{1}_3 \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.3

Berechnen Sie zu folgenden Matrizen den Wert von e^{At}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(i) Die Aufgabe ist gut per Jordanisierung lösbar, mit einem Trick geht es aber schneller:

$$A^0 = \mathbb{1}_3 \; ; \qquad A^1 = A \; ; \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

Behauptung:

$$A^n = \frac{1}{3} 3^n A \quad \text{für} \quad n \geq 1 \quad \text{(IV)}$$

Beweis per Induktion:

$$\text{(IA)} \quad n = 1: \quad A^1 = A = \frac{1}{3} 3^1 A$$

$$\text{(IS)} \quad n \to n+1: \quad A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{3} 3^n A \cdot A = \frac{1}{3} 3^n \cdot 3A = \frac{1}{3} 3^{n+1} A \quad \blacksquare$$

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \mathbb{1}_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \mathbb{1}_3 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n 3^n}{n!} A = \mathbb{1}_3 + \frac{1}{3} A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} - \frac{1}{3} A =$$

$$\mathbb{1}_3 + \frac{1}{3} A \, \mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{3} A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + 2 & \mathrm{e}^{3t} - 1 & \mathrm{e}^{3t} - 1 \\ \mathrm{e}^{3t} - 1 & \mathrm{e}^{3t} + 2 & \mathrm{e}^{3t} - 1 \\ \mathrm{e}^{3t} - 1 & \mathrm{e}^{3t} - 1 & \mathrm{e}^{3t} + 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Auch hier kann man leicht jordanisieren, man kann aber auch A in eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N aufteilen, wobei D und N kommutieren:

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{Dt} \, \mathrm{e}^{Nt} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{Dt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

$$N^0 = \mathbb{1}_3 \; ; \quad N^1 = N \; ; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad N^3 = 0_3$$

$$\mathrm{e}^{Nt} = \left(N^0 + Nt + \frac{t^2}{2} N^2 + \underbrace{\frac{t^3}{3!} N^3 + \ldots}_{=0} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2t & 1 & 0 \\ t^2 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{Dt} \, \mathrm{e}^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2t & 1 & 0 \\ t^2 & -t & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$$

3 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Aufgabe 3.1 *Homogenes Differentialgleichungssystem*

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

charakteristisches Polynom:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ 3-facher EW $\lambda = 1$

$$N := A - 1\,\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \dim\ker N = n - \operatorname{rg} N = 3-2 = 1 \Rightarrow \text{ ein Jordan-Kästchen}$$

$$\text{Jordannormalform: } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme Transformationsmatrix S aus Hauptvektoren, so dass $A = SJS^{-1}$:

$$\ker N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \;; \quad \ker N^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker N^3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wähle $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker N^3, \notin \ker N^2$ als Basisvektor.

$$v_2 = Nv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \ker N^2, \notin \ker N \;; \qquad v_1 = Nv_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker N$$

Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Jordan-Basis und $S := \big(v_1, v_2, v_3\big)$ die Transformationsmatrix. $\mathrm{e}^{At} = S\,\mathrm{e}^{Jt}\,S^{-1}$ ist eine Fundamentallösung. Wegen $\det S \neq 0$ ist auch $S\,\mathrm{e}^{Jt}\,S^{-1}S = S\,\mathrm{e}^{Jt}$ eine Fundamentallösung.

$$S\,\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^t & (4t+1)\,\mathrm{e}^t & (2t^2+t)\,\mathrm{e}^t \\ 0 & -\,\mathrm{e}^t & -t\,\mathrm{e}^t \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^t & (2t+1)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

Die Spalten dieser Matrix bilden eine Basis für das Fundamentalsystem.

Aufgabe 3.2 *Inhomogene Differentialgleichungssysteme*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Systeme

$$\dot{x} = Ax + b(t) \quad \text{und} \quad \dot{y} = Ay + c(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(i) Lösung der homogenen Gleichung
Berechne Eigenwerte:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i$$

Eigenvektor zu $\lambda = +i$:

$$\ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Eigenvektor zu $\lambda = -i$:

$$\ker \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Damit ist $A = SDS^{-1}$ mit der Transformationsmatrix S aus Eigenvektoren:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \quad ; \quad S^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

So lässt sich eine Fundamentallösung $X(t) = \mathrm{e}^{At}$ berechnen:

$$X(t) = \mathrm{e}^{At} = S\,\mathrm{e}^{Dt}\,S^{-1} = \frac{1}{2i} S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\,\mathrm{e}^{it} & \mathrm{e}^{it} \\ -i\,\mathrm{e}^{-it} & \mathrm{e}^{-it} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(ii) Lösung der inhomogenen Gleichungen
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $\dot{x} = Ax + b(t)$ ist gegeben durch

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t \mathrm{d}s\; X(t)X^{-1}(s)b(s) \quad x_0 \in \mathbb{C}^2$$

$$\int_0^t \mathrm{d}s\; X(t)X^{-1}(s)b(s) = \int_0^t \mathrm{d}s\; X(t) \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} = X(t) \int_0^t \mathrm{d}s\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= X(t) \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$x(t) = X(t)x_0 + \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} \quad x_0 \in \mathbb{C}^2$$

Wir führen die gleiche Rechnung beim zweiten Gleichunssystem durch:

$$\int\limits_0^t \mathrm{d}s \; X(t)X^{-1}(s)c(s) = X(t) \int\limits_0^t \mathrm{d}s \begin{pmatrix} \sin s \cos s \\ \sin^2 s \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2 t \\ \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$y(t) = X(t)y_0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix} \qquad y_0 \in \mathbb{C}^2$$

Aufgabe 3.3 *Gekoppelte Differentialgleichungen*

Lösen Sie folgendes System zum Anfangswert-Tupel $x_0 = 1, \dot{x}_0 = 2, y_0 = 3$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

$$\ddot{x} = -x + \dot{x} + y$$

$$\dot{y} = \quad x + \dot{x} - y$$

Schreiben Sie das System dazu in ein Gleichungssystem erster Ordnung um.

Lösung:

Durch die Substitution $v = \dot{x}$ erhält man das folgende System:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ y \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda^2) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$
Berechne Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_1} \right\rangle$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_2} \right\rangle$$

$$\lambda_3 = -1 \qquad \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=:v_3} \right\rangle$$

Es gibt nun mehrere mögliche Wege weiterzurechnen, zwei davon seien hier vorgestellt:

(i) Zerlegung des Anfangswerts in Hauptvektoren (in diesem Fall nur HV erster Stufe, also EV) durch „Hinschauen“oder Lösung eines LGS:
Mit der Formel aus der Vorlesung kann man für jeden Hauptvektor v den Wert von $\mathrm{e}^{At}\, v$ berechnen:

$$\mathrm{e}^{At}\, v_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, v_1 = \mathrm{e}^0\, v_1 = v_1 \; ; \quad \mathrm{e}^{At}\, v_2 = \mathrm{e}^t\, v_2 \; ; \quad \mathrm{e}^{At}\, v_3 = \mathrm{e}^{-t}\, v_3$$

Damit erhält man eine allgemeine Lösung der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 \,\mathrm{e}^t\, v_2 + c_3 \,\mathrm{e}^{-t}\, v_3$$

Nun müssen die Koeffizienten c_1, c_2, c_3 so bestimmt werden, dass $x(0) = x_0, v(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}_0, y(0) = y_0$. Durch Lösen des Gleichungssystems

$$v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder eben durch „scharf Hinschauen“erhält man:

$$c_1 = -3 \;; \quad c_2 = 3 \;; \quad c_3 = 1$$

und somit die Lösung:

$$x(t) = -3 + 3\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \;; \quad y(t) = -3 + 3\,\mathrm{e}^t + 3\,\mathrm{e}^{-t}$$

(ii) Berechne e^{At} und wende den Satz über die Lösung des linearen Systems erster Ordnung aus der Vorlesung an: Diagonalisere dazu die Matrix mittels einer Basis aus Eigenvektoren: $A = SDS^{-1}$ mit

$$S = \big(v_1, v_2, v_3\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zunächst muss noch S^{-1} berechnet werden. Dazu formt man folgendes System solange um, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Dann steht auf der rechten Seitet S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3=Z3-Z1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3=Z3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z2=Z2+Z3]{Z1=Z1-Z3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{Z1=Z1-Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Nun können wir e^{At} berechnen:

$$\mathrm{e}^{At} = S\,\mathrm{e}^{Dt}\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) & -1 + \mathrm{e}^t & -1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) \\ \frac{1}{2}(-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) & \mathrm{e}^t & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) \\ 2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-t} & -1 + \mathrm{e}^t & -1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

Die Lösung zum gegebenen Anfangswert erhält man durch:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;; \quad \text{wobei } v_0 = \dot{x}_0$$

Es ergibt sich:

$$x(t) = -3 + 3\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \;; \quad y(t) = -3 + 3\,\mathrm{e}^t + 3\,\mathrm{e}^{-t}$$

4 Skalare Differentialgleichungen

Aufgabe 4.1 *Reelle Lösungen*

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$\overset{(4)}{x} - 2\ddot{x} + x = \sin \omega t \qquad \omega > 0$$

Lösung:

Zunächst wird die homogene Gleichung gelöst. Charakteristisches Polynom:

$$\chi = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = +1 \text{ (2-fach)} \quad \lambda_2 = -1 \text{ (2-fach)}$$

Damit ist der Lösungsraum der homogenen Gleichung:

$$\mathbb{L}_H = \left\langle \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, t\,\mathrm{e}^t, t\,\mathrm{e}^{-t} \right\rangle$$

Die Inhomogenität hat die Gestalt $\sin(t) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t})$. Wir wählen also als Ansatz:

$$x_p(t) = A\,\mathrm{e}^{i\omega t} + B^{-i\omega t}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$A(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)\,\mathrm{e}^{i\omega t} + B(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{1}{2i}\,\mathrm{e}^{i\omega t} - \frac{1}{2i}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$A = -B = \frac{1}{2i(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)} \ \Rightarrow \ x_p(t) = \frac{1}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}\sin \omega t$$

Damit ist die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ a_1\,\mathrm{e}^t + a_2\,\mathrm{e}^{-t} + a_3 t\,\mathrm{e}^t + a_4 t\,\mathrm{e}^{-t} + x_p(t) \;\middle|\; c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{C} \right\}$$

Diese Lösungsmenge ist bereits reell.

Aufgabe 4.2 *Anfangswertproblem*

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 2t$$

zum Anfangswert $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Lösung:

Zunächst wird die homogene Gleichung gelöst. Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = -2 \text{ (1-fach)} \quad \lambda_2 = -1 \text{ (1-fach)}$$

Damit ist der Lösungsraum der homogenen Gleichung:

$$\mathbb{L}_H = \left\langle \mathrm{e}^{-2t}, \mathrm{e}^{-t} \right\rangle$$

Die Inhomogenität hat die Gestalt $(b_0 + b_1 t)\,\mathrm{e}^{0t}$. Wir wählen den Ansatz

$$x_p = A + Bt$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$3B + 2A + 2Bt = 2t$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$B = 1 \; ; \; A = -\frac{3}{2}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = a_1\,\mathrm{e}^{-2t} + a_2\,\mathrm{e}^{-t} + t - \frac{3}{2}$$

Bestimme a_1, a_2 durch Einsetzen in die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = a_1 + a_2 - \frac{3}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{x}(0) = -2a_1 - a_2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \; a_1 = -\frac{1}{2} \; ; \; a_2 = 2 \;\; \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} + 2\,\mathrm{e}^{-t} + t - \frac{3}{2}$$

Aufgabe 4.3 *Inhomogene Differentialgleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Differentialgleichungen:

(i)

$$\overset{(4)}{x} - 2\overset{(3)}{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} = \mathrm{e}^t$$

Hinweis: $x(t) = \mathrm{e}^t$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung.

Lösung:

Zunächst wird die homogene Gleichung gelöst. Charakteristisches Polynom:

$$\chi = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)$$

$\Rightarrow \; \lambda_1 = 0$ einfache Nullstelle. Aus dem Hinweis folgt, dass $\lambda_2 = 1$ ebenfalls eine Nullstelle ist. Mit Polynomdivision ergibt sich:

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Die restlichen Nullstellen sind also $\lambda_3 = 2$ und $\lambda_4 = -1$, jeweils einfach. Damit lässt sich der Lösungsraum der homogenen Gleichung bestimmen:

$$\mathbb{L}_H = \left\langle 1, \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{-t} \right\rangle$$

Die Inhomogenität hat die Gestalt $a\,\mathrm{e}^{\mu t}$ mit $\mu = 1$. Bei der Wahl des Ansatzes muss berücksichtigt werden, dass $\mu = 1$ auch eine einfache Nullstelle von χ ist:

$$x_p(t) = At^{m(1)}\,\mathrm{e}^t = At\,\mathrm{e}^t$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$A = -\frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; x_p(t) = -\frac{1}{2} t\,\mathrm{e}^t$$

Die Lösungsmenge lautet somit:

$$\mathbb{L} = \left\{ b_1 + b_2\,\mathrm{e}^t + b_3\,\mathrm{e}^{2t} + b_4\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2} t\,\mathrm{e}^t \;\middle|\; b_1, \ldots, b_4 \in \mathbb{C} \right\}$$

(ii)

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \cosh(t)$$

Lösung:

Zunächst wird die homogene Gleichung gelöst. Charakteristisches Polynom:

$$\chi = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, jeweils einfach. Damit ist der Lösungsraum der homogenen Gleichung:

$$\mathbb{L}_H = \left\langle \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{2t} \right\rangle$$

Die Inhomogenität hat die Gestalt $a_1 \mathrm{e}^t + a_2 \mathrm{e}^{-t}$. Ansatz:

$$x_p(t) = At^{m(1)} \mathrm{e}^t + Bt^{m(-1)} \mathrm{e}^{-t} = At \mathrm{e}^t + B \mathrm{e}^{-t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$A \cdot (-1) \mathrm{e}^t + B \cdot (6) \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2} \mathrm{e}^t + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-t}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{12} \;\Rightarrow\; x_p = -\frac{1}{2} t \mathrm{e}^t + \frac{1}{12} \mathrm{e}^{-t}$$

Die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung ist somit:

$$\mathbb{L} = \left\{ b_1 \mathrm{e}^t + b_2 \mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} t \mathrm{e}^t + \frac{1}{12} \mathrm{e}^{-t} \;\middle|\; b_1, b_2 \in \mathbb{C} \right\}$$