Technische Universität München

Thomas Reifenberger — Analysis I

Übungsblatt 4

Repetitorium Analysis I für Physiker

1 Multiple Choice

Aufgabe 1.1 *Lösungen der homogenen Gleichung*

Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen der homogenen Gleichung

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

Dann sind folgende Funktionen ebenfalls Lösungen:

	Richtig	Falsch
$x_1(t) - x_2(t)$	□	□
$x_1(t)x_2(t)$	□	□
$x_1(0)x_2(0)$	□	□
$x_1(t)x_2(0) + x_1(0)x_2(t)$	□	□
$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	□	□

Aufgabe 1.2 *Lösungen der inhomogenen Gleichung*

Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$$

Dann sind folgende Funktionen ebenfalls Lösungen:

	Richtig	Falsch
$x_1(t) - x_2(t)$	□	□
$x_1(t) - x_2(t) + b(t)$	□	□
$2x_1(t) - x_2(t)$	□	□
$x_1(t)b(t)$	□	□

2 Matrixexponential

Aufgabe 2.1 *Matrixexponential*

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion:

(i) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Dann gilt:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}$$

(ii) Sei S invertierbar. Dann ist

$$\mathrm{e}^{A} = S\,\mathrm{e}^{S^{-1}AS}\,S^{-1}$$

(iii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{At} = A\,\mathrm{e}^{At}$$

Aufgabe 2.2

Berechnen Sie explizit (ohne den Satz aus der Vorlesung) den Wert von:

$$e^{At} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.3

Berechnen Sie zu folgenden Matrizen den Wert von e^{At}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Aufgabe 3.1 *Homogenes Differentialgleichungssystem*

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2 *Inhomogene Differentialgleichungssysteme*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Systeme

$$\dot{x} = Ax + b(t) \quad \text{und} \quad \dot{y} = Ay + c(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3 *Gekoppelte Differentialgleichungen*

Lösen Sie folgendes System zum Anfangswert-Tupel $x_0 = 1, \dot{x}_0 = 2, y_0 = 3$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

$$\ddot{x} = -x + \dot{x} + y$$

$$\dot{y} = x + \dot{x} - y$$

Schreiben Sie das System dazu in ein Gleichungssystem erster Ordnung um.

4 Skalare Differentialgleichungen

Aufgabe 4.1 *Reelle Lösungen*

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$\overset{(4)}{x} - 2\ddot{x} + x = \sin \omega t \qquad \omega > 0$$

Aufgabe 4.2 *Anfangswertproblem*

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 2t$$

zum Anfangswert $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Aufgabe 4.3 *Inhomogene Differentialgleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Differentialgleichungen:

(i)

$$\overset{(4)}{x} - 2\overset{(3)}{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} = \mathrm{e}^t$$

Hinweis: $x(t) = \mathrm{e}^t$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung.

(ii)

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \cosh(t)$$