Technische Universität München

Thomas Reifenberger Analysis I

Vorlesung, Kapitel 4

Repetitorium Analysis I für Physiker

Lineare Differentialgleichungen

1 Das Matrixexponential

Definition 1.1

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

wobei gilt: $A^0 = \mathbb{1}_n,\ A^k = AA^{k-1}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$

Satz 1.2 *Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion*

(i) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Dann gilt:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B$$

(ii) Sei S invertierbar. Dann ist

$$\mathrm{e}^A = S\,\mathrm{e}^{S^{-1}AS}\,S^{-1}$$

(iii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{At} = A\,\mathrm{e}^{At}$$

Satz 1.3 *Matrixexponential von Jordankästchen*

$J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{e}^{\lambda t} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{\lambda} \\ & \mathrm{e}^{\lambda t} & \ddots & & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & & & & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Definition 1.4 *Hauptvektor*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ heißt Hauptvektor k-ter Stufe zum Eigenwert λ, wenn gilt:

$$(A - \lambda \mathbb{1}_n)^k x = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda \mathbb{1}_n)^{k-1} x \neq 0$$

Eigenvektoren sind also Hauptvektoren erster Stufe.

Satz 1.5

Sei x ein Hauptvektor k-ter Stufe von A zum Eigenwert λ. Dann ist

$$\mathrm{e}^{At}\, x = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda \mathbb{1}_n)^j x$$

2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, das Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Ein System der Form

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \qquad A : I \to \mathbb{K}^{n\times n},\ b : I \to \mathbb{K}^n \text{ stetig} \tag{L}$$

heißt Lineare Differentialgleichung erster Ordnung, wobei $x : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ zu bestimmen ist, so dass x die Differentialgleichung (L) erfüllt.

Satz 2.1 *Existenz und Eindeutigkeit*

Zu jedem Anfangswert (AW) $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$ mit $t_0 \in I$ gibt es genau eine Lösung, die (L) und (AW) erfüllt. Daraus folgt sofort, dass zwei Lösungen identisch sind, wenn sie zu einem Zeitpunkt übereinstimmen:

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) \text{ für ein } t_0 \in I \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I$$

Um jedoch Lösungen zu bestimmen, müssen wir zunächst das homogene System lösen.

2.1 homogenes System

Wir untersuchen zunächst die (L) zugeordnete homogene Differentialgleichung:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{H}$$

Satz 2.2

Die Menge der Lösungen von (H) ist ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Matrixnotation

Wir schreiben nun (H) in *Matrixnotation*:

$$\dot{X} = A(t)X \quad \text{mit } X : I \to \mathbb{K}^{n\times n} \tag{M}$$

Lemma 2.3

Eine Matrix $X(t)$ ist Lösung von (M) genau dann, wenn jede Spalte von X eine Lösung von (H) ist.

Definition 2.4 *Fundamentallösung, Fundamentalsystem*

Eine Matrix $X(t)$, die (M) erfüllt und deren Spalten $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind, heißt Fundamentallösung. Die Spalten bilden dann ein Fundamentalsystem der Lösungen von (H).

Satz 2.5 *Über Fundamentallösungen*

Sei $X(t)$ Fundamentallösung von (M). Jede weitere Fundamentallösung Y lässt sich schreiben als:

$$Y(t) = X(t)C \quad \text{mit } C \in \mathbb{K}^{n\times n},\ \det C \neq 0$$

Jede Matrix $Z(t) = X(t)D$ mit $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist Lösung von (M). Sie ist Fundamentallösung genau dann, wenn $\det D \neq 0$.

Konstante Koeffizienten

$$\dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{K}^{n\times n} \tag{KH}$$

Satz 2.6 *Lösung der homogenen LDG mit konstanten Koeffizienten*

Eine Fundamentallösung zu (KH) (diejenige mit $X(0) = \mathbb{1}_n$) ist gegeben durch

$$X(t) = \mathrm{e}^{At}$$

Die Lösung von (KH) zum (AW) $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,x_0$$

Die Lösungen sind auf $I = \mathbb{R}$ definiert.

2.2 inhomogenes System

Wir betrachten nun wieder das inhomogene System (allgemein mit zeitabhängigen Koeffizienten):

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \qquad \text{mit (AW) } x(t_0) = x_0 \tag{L}$$

Der Lösungsraum ist nun kein Vektorraum mehr! Stattdessen gilt, analog zur Linearen Algebra:

Satz 2.7 *Lösungsraum der inhomogenen Gleichung*

Die allgemeine Lösung von (L) erhält man als Summe einer beliebigen partikulären Lösung von (L) und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems (H).

$$x(t)_{\text{inhomogen}} = x(t)_{\text{homogen}} + x(t)_{\text{partikulär}}$$

Wir müssen also nur noch eine einzelne Lösung von (L) finden.

Satz 2.8 *Lösung des inhomogenen Systems*

Sei $X(t)$ die Fundamentallösung des homogenen Systems (H) mit $X(t_0) = \mathbb{1}_n$. Dann ist die Lösung von (L) mit (AW) gegeben durch

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)\ X^{-1}(s)\ b(s)\ \mathrm{d}s$$

Die allgemeine Lösung von (L) lautet somit:

$$x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t)\ X^{-1}(s)\ b(s)\ \mathrm{d}s \qquad c \in \mathbb{K}^n$$

Bemerkung

Bei konstanten Koeffizienten ist $X(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}$ und $X^{-1}(s) = \mathrm{e}^{-A(s-t_0)}$.

3 Skalare lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine Gleichung der Form

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = q(t) \tag{SL}$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ und stetigem $q : I \to \mathbb{K}$ heißt skalare lineare Differentialgleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten.
(SL) lässt sich in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung umschreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \\ \overset{(n)}{x} \end{pmatrix}}_{\dot{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{x} \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

Dadurch können wir die Sätze über lineare Differentialgleichungen erster Ordnung direkt auf (SL) übertragen:

Satz 3.1 *Existenz und Eindeutigkeit*

Zu jedem n-Tupel aus Anfangswerten (AW) $x(t_0), \ldots, \overset{(n-1)}{x}(t_0) \in \mathbb{K}$ für ein $t_0 \in I$ gibt es genau eine Lösung, die (SL) und (AW) erfüllt. Zwei Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ sind identisch, wenn sie zu einem Zeitpunkt $t_0 \in I$ im Funktionswert sowie dem Wert der ersten $n-1$ Ableitungen übereinstimmen:

$$\overset{(k)}{x}_1(t_0) = \overset{(k)}{x}_2(t_0) \quad \text{für ein } t_0 \in I \text{ und } k = 0, \ldots, n-1 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I$$

3.1 Homogene Gleichung

Wir untersuchen zunächst die (SL) zugeordnete homogene Gleichung:

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}(t)\overset{(n-1)}{x} + \ldots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0 \tag{SLH}$$

Satz 3.2 *Über den Lösungsraum*

Die Menge der Lösungen von (SLH) ist ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 3.3 *Charakteristisches Polynom*

Das Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

heißt *charakteristisches Polynom* von (SLH). Es entspricht dem charakteristischen Polynom der Matrix A. Hat man die Nullstellen λ_i sowie ihre Vielfachheit m_i bestimmt, kann man P in Linearfaktoren zerlegen:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \quad i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$$

wobei r die Anzahl verschiedener Nullstellen ist.

Satz 3.4 *Basis des Lösungsraums*

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die Nullstellen von P mit Vielfachheiten $m(\lambda_i)$, so ist eine Basis des Lösungsraums gegeben durch:

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m(\lambda_1)-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_r t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}, \dots, t^{m(\lambda_r)-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}$$

oder, anders formuliert:

$$t^k\,\mathrm{e}^{\lambda_i t} \qquad k = 0, \dots, m(\lambda_i) - 1; \quad i = 1, \dots, r$$

3.2 Inhomogene Gleichung

Wir betrachten nun wieder die inhomogene Gleichung:

$$\overset{(n)}{x} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x} + \dots + a_1\dot{x} + a_0 x = q(t) \tag{SL}$$

Der Lösungsraum von (SL) ist kein Vektorraum! Stattdessen gilt:

Satz 3.5 *Lösungsraum der inhomogenen Gleichung*

Die allgemeine Lösung von (SL) erhält man als Summe einer beliebigen partikulären Lösung von (SL) und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems (SLH).

$$x(t)_{\text{inhomogen}} = x(t)_{\text{homogen}} + x(t)_{\text{partikulär}}$$

Satz 3.6 *Lösung bei Quasipolynomen als Inhomogenität*

Die Inhomogenität q habe die Gestalt:

$$q_\mu(t) = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k)\,\mathrm{e}^{\mu t}$$

Das charakteristische Polynom habe die Nullstellen λ_i mit der Vielfachheit $m(\lambda_i)$.
Dann existiert eine Lösung $x_\mu(t)$ von (SL) der Form

$$x_\mu(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_k t^k) t^{m(\mu)} e^{\mu t}$$

Die Koeffizienten c_j lassen sich bestimmen durch Einsetzen in (SL).
Es gilt das Superpositionsprinzip:
Sei $q(t) = \sum\limits_\mu q_\mu(t)$. Dann ist $x(t) = \sum\limits_\mu x_\mu(t)$ eine Lösung von (SL).

4 Kurzanleitung Jordanisieren

4.1 Überblick

Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich durch einen Basiswechsel in die Jordannormalform J bringen.
Genauer gesagt, ist die Matrix A eine Darstellung einer linearen Abbildung Φ in der kanonischen Basis $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$. Die Matrix J ist die Darstellung der Abbildung Φ in der Jordanbasis. Haben die Jordan-Basisvektoren in der kanonischen Basis die Darstellung $b_1, \dots, b_n$, dann ist die Transformationsmatrix S gegeben durch $S = (b_1, \dots, b_n)$. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n & & \text{kanonische Basis} \\ {\scriptstyle S}\uparrow & & {\scriptstyle S}\uparrow & & \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{J} & \mathbb{C}^n & & \text{Jordanbasis} \end{array}$$

Hieraus lässt sich ablesen:

$$A = SJS^{-1} \quad \text{bzw.} \quad J = S^{-1}AS$$

4.2 Aufteilung in Jordanblöcke

Die Matrix A habe das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\tilde{\lambda}) = \prod_{i=1}^{r} (\tilde{\lambda} - \lambda_i)^{d_i}$$

und somit die Eigenwerte λ_i mit Vielfachheit d_i. Die Jordannormalform hat dann die Gestalt einer Block-Diagonalmatrix aus r quadratischen Blöcken $B(\lambda_i)$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{B(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{B(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B(\lambda_r)} \end{pmatrix}$$

Ein Block $B(\lambda_i)$ hat die Länge d_i, also die algebraische Vielfachheit des zugehörigen Eigenwertes. Es gilt:

$$\boxed{\text{Zu einem Block der Länge } d_i \text{ gehören } d_i \text{ Basisvektoren.}}$$

Im Folgenden betrachten wir nur noch den Block zum Eigenwert $\lambda := \lambda_1$ der Länge $d := d_1$, die nun erläuterte Prozedur muss für alle weiteren Eigenwerte λ_i wiederholt werden.

4.3 Vorbereitungen

Für die weiteren Berechnungen definieren wir die nilpotente Matrix

$$N := A - \mathbb{1} \cdot \lambda$$

Der Block $B(\lambda)$ hat die Gestalt einer Block-Diagonalmatrix aus Jordankästchen:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_t} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Die Anzahl t der Jordankästchen J_i ist die Dimension des Kerns von N und damit gleich der Anzahl der Eigenvektoren zu λ:

$$\boxed{t = \text{Anzahl der Jordankästchen} = \dim \ker N}$$

Nach Konvention werden die Jordankästchen der Größe nach sortiert, das Kästchen mit der größten Länge steht links oben. Außerdem gilt:

$$\boxed{\text{Zu einem Jordankästchen der Länge } k \text{ gehören } k \text{ Basisvektoren.}}$$

Nun berechnen wir möglichst einfache Basen von $\ker N, \ker N^2, \ker N^3, \ldots$ und bestimmen die kleinste Zahl p, für die gilt:

$$\ker N^p = \ker N^{p+1}$$

Es gilt:

$$\boxed{p = \text{die Länge des größten Kästchens zum Eigenwert } \lambda}$$

Hier sieht man: Falls $p = 1$, ist der Jordanblock diagonal und die Basisvektoren zu diesem Block sind Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

4.4 Bestimmung der Basisvektoren

Wir beginnen bei $\ker N^p$ und suchen (selbstverständlich linear unabhängige) Basisvektoren $u_1, u_2, \ldots$, für die gilt:

$$u_i \in \ker N^p \text{ und } u_i \notin \ker N^{p-1}$$

Zu jedem dieser Vektoren u_i erhält man ein Jordankästchen der Länge p. Die Vektoren

$$N^{p-1}u_1, \ldots, Nu_1, u_1, N^{p-1}u_2, \ldots, Nu_2, u_2, \ldots$$

bilden (in genau dieser Reihenfolge!) die ersten Basisvektoren der geordneten Jordanbasis.
Hat man nun schon die d Basisvektoren zu diesem Jordanblock zusammen, ist man fertig, ansonsten geht man einfach eine Stufe tiefer und wiederholt die obigen Schritte, d.h. wir suchen Basisvektoren $v_1, v_2, \ldots$, für die gilt:

$$v_i \in \ker N^{p-1} \text{ und } v_i \notin \ker N^{p-2}$$

Selbstverständlich müssen diese Basisvektoren linear unabhängig von allen bisher bestimmten Basisvektoren sein.
Die oben begonnene geordnete Jordanbasis ergänzen wir nun um die Vektoren

$$N^{p-2}v_1, \ldots, Nv_1, v_1, N^{p-2}v_2, \ldots, Nv_2, v_2, \ldots$$

Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis man alle Basisvektoren zusammen hat.

Folgende Abbildung stellt die Jordanketten eines Jordanblocks der Länge 11 dar, der in Jordankästchen der Längen 4, 4, 2 und 1 zerfällt. Die Zahl in der zweiten Zeile gibt die Dimension des Kerns aus der ersten Zeile an.

$\ker N$	$\subseteq$	$\ker N^2$	$\subseteq$	$\ker N^3$	$\subseteq$	$\ker N^4$
4		7		9		11
N^3u_1	$\longleftarrow$	N^2u_1	$\longleftarrow$	Nu_1	$\longleftarrow$	u_1
N^3u_2	$\longleftarrow$	N^2u_2	$\longleftarrow$	Nu_2	$\longleftarrow$	u_2
Nv_1	$\longleftarrow$	v_1				
w_1						