Technische Universität München

MICHAEL SCHRAPP
ANALYSIS I
ÜBUNGSBLATT 3
LÖSUNGEN

Repetitorium Analysis I für Physiker

Aufgabe 1

Wir definieren zunächst die Funktion $g(t) = \int\limits_0^2 f(t)t^2 dt$

Die Menge $B = g^{-1}(]-\infty, 5[)$ist somit als stetiges Urbild einer offenen Menge ebenfalls offen.

Aufgabe 2

Als Quotienten stetiger Funktionen, wobei der Nenner jew. ≥ 1 ist, sind alle Funktionen g_n stetig.

Für den Grenzübergang gilt:

$$x \neq 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|} = \frac{x}{|x|} = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \Longrightarrow g_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die überall stetigen Funktionen g_n konvergieren also punktweise gegen die Funktion sgn(x), die unstetig ist im Punkt $x = 0$.

Aufgabe 3

a) Die Funktion $d(x) = \tan x - x$ ist auf dem Intervall $[0, \pi/2[$ stetig und differenzierbar auf dem offenen Intervall $]0, \pi/2[$ mit der Ableitung

$$d^{'}(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x\,.$$

Sie ist > 0 für alle $x \in\,]0, \pi/2[$. Nach dem Mittelwertsatz gilt dort $d(x) = d(x) - d(0) = x \cdot d'(\xi)$ für ein passendes $\xi \in\,]0, x[$. Das ergibt $d(x) > 0$.

b) Die gefragte Funktion $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist im Intervall $]0, \pi/2[$ nach der Quotientenregel differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} \cdot \big(x - \tan x\big)\,.$$

Dieser Wert ist nach Teil a) überall negativ; folglich ist g (nach dem Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen) strikt monoton fallend.

Aufgabe 4

a.)

(i) Mehrfaches anwenden der Regel von L'Hopital liefert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1-\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x(1+\tan^2 x)}{6x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x - 2\tan^3 x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2(1+\tan^2 x)-2(3\tan^2 x(1+\tan^2 x))}{6} = -1/3$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\cos\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(\cos\frac{1}{x})}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{\frac{-1}{x^2}}$$
$$= -\lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^x = e^0 = 1$$

(iii)

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to\pi/2} e^{\tan x\ln(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan x\ln(\sin x)}$$
$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln|\sin x|}{\tan x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$
$$= -\lim_{x\to\pi/2}(-\sin x\cos x) = 0$$
$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$$

(iv)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x - 1}{\arcsin(\tan x)-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}}\frac{1}{\cos^2 x}}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\tan^2 x = 0}$$

b.)

Zunächst berechnen wir die Ableitungen von $y = \tan x$ und damit die Taylorreihe.

$$y = \tan x \quad y(0) = 0$$
$$y' = 1+\tan^2 x \quad y'(0) = 1$$
$$y'' = 2\tan x(1+\tan^2 x) \quad y''(0) = 0$$
$$y''' = 2(1+3\tan^2 x)(1+\tan^2 x) \quad y'''(0) = 2$$
$$\Longrightarrow y = x + 1/3x^3 + o(x^5)$$

Für den gesuchten Grenzwert erhalten wir schließlich:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} = \frac{x-(x+1/3x^3+o(x^5))}{x^3} = -1/3$$

Aufgabe 5

Zur Untersuchung der Stetigkeit nehmen wir eine Fallunterscheidung vor.
$x < 0$: dann wird $f(x) = \sqrt{-x}$. Aus Aufgabe sss wissen wir jedoch, dass diese Funktion stetig ist. Analoges gilt für $x > 0$.
Am Nullpunkt gilt:

$$\lim_{x \to 0 \wedge x < 0} \sqrt{-x} = 0 = \lim_{x \to 0 \wedge x > 0} \sqrt{x}$$

Womit auch die Stetigkeit im Ursprung gezeigt ist.
Nun zur Differenzierbarkeit von $f(x)$.

$$x < 0 : \text{dann gilt: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$x > 0 : \text{dann gilt: } f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

im Falle $x = 0$ folgt jedoch:

$$\lim_{x \to 0 \wedge x < 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \neq \lim_{x \to 0 \wedge x > 0} \frac{-1}{2\sqrt{x}} = -\infty$$

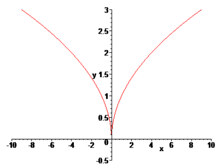

Abbildung 1: Graph zu f

Aufgabe 6

a). Die Funktion $y \mapsto \lfloor y \rfloor$ erfüllt die Relation $\lfloor y + 1 \rfloor = \lfloor y \rfloor + 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Deshalb wird

$$\text{zack}(x+1) = \Big| \lfloor x + 3/2 \rfloor - x - 1 \Big| = \Big| \lfloor x + 1/2 \rfloor + 1 - x - 1 \Big| = \text{zack}(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Auf dem Intervall $[-1/2, 1/2\,[$ gilt $\text{zack}(x) = |-x| = |x|$, und im Punkt $x = 1/2$ ist $\text{zack}(1/2) = |1 - 1/2| = \text{zack}(-1/2) = 1/2$. Mithin ist $\text{zack}(x) = |x|$ für alle $x \in I = [-1/2, 1/2]$ und $\text{zack}(x+1) = \text{zack}(x)$ sonst. Insbesondere ist die Restrikton von $\text{zack}(x)$ gleich $-x$ auf $-1/2 \leq x \leq 0$, also linear und $\text{zack}(x) = x$ auf $0 \leq x \leq 1/2$ ebenfalls linear.

b.) Offenbar ist zack auf I stetig mit einem einzigen Minimum bei $x = 0$ und mit je einem Maximum in $x = -1/2$ und in $x = 1/2$. Wegen der Periodizität ist $\text{zack}(x + m) = \text{zack}(x)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in I$. Daraus folgt auch die Stetigkeit von zack auf $\mathbb{R}$. Die Menge der Minima von zack ist $\mathbb{Z}$, ihre Maxima liegen genau in den Punkten von $1/2 + \mathbb{Z}$. Zwischen je zwei benachbarten Extremstellen von f verläuft die Funktion linear.

Aufgabe 7

a) Wir zeigen zunächst $\quad \lim\limits_{h\searrow 0} \dfrac{\exp(h)-1}{h} \;=\; 1 \;=\; \lim\limits_{h\nearrow 0} \dfrac{\exp(h)-1}{h}\,.$

Zum Beweis folgern wir aus der charakteristischen Ungleichung $\exp(x) \geq 1+x$ und der Funktionalgleichung von exp für alle $h \in]\,0,1\,[$ die Abschätzung

$$(1+h/2)^2 \;\leq\; \big(\exp(h/2)\big)^2 \;=\; \exp(h) \;=\; \frac{1}{\exp(-h)} \;\leq\; \frac{1}{1-h}\,.$$

Daraus erhält man für alle $h \in]\,0,1\,[$

$$1+h/4 \;\leq\; \frac{\exp(h)-1}{h} \;\leq\; \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{1-h}-1\Big) \;=\; \frac{1}{1-h}\,.$$

Beide Seiten in den letzten Abschätzungen konvergieren für $h \searrow 0$ gegen 1. Das ergibt den Grenzwert $\lim_{h\searrow 0}\exp(h) = 1$ und die erste Gleichung in der Behauptung. Nun ist für alle $t \in]\,0,1\,[$

$$\frac{\exp(-t)-1}{-t} \;=\; \frac{1}{\exp(t)}\cdot\frac{\exp(t)-t}{t}\,;$$

daraus ergibt sich nach dem bereits Bewiesenen auch die zweite Behauptung. Sei jetzt $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wird für alle $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} \;=\; \exp(a)\cdot\frac{\exp(h)-1}{h}\,.$$

Hieraus folgt jetzt $\exp'(a) = \exp(a)$.

b) Nach der Kettenregel wird die allgemeine Potenz $x^\alpha = \exp\big(\alpha\ln x\big)$ in $\mathbb{R}_+^\times$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{d}{dx}x^\alpha \;=\; \alpha\frac{1}{x}\cdot\exp\big(\alpha\ln x\big) \;=\; \alpha\exp\big((\alpha-1)\ln x\big) \;=\; \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Darin wurde die Formel $\ln'(x) = 1/x$ verwendet.

Aufgabe 8

a) Es ergibt sich mit der Summen-, der Ketten- und der Quotienten-Regel

$$\sinh'(x) \;=\; \tfrac{1}{2}\big(e^x+e^{-x}\big) \;=\; \cosh x\,,$$

$$\cosh'(x) \;=\; \tfrac{1}{2}\big(e^x-e^{-x}\big) \;=\; \sinh x\,,$$

$$\tanh'(x) \;=\; \frac{\sinh'(x)\cosh(x)-\sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} \;=\; \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \;=\; 1-\tanh^2(x)\,.$$

b) Aus der bekannten Limesbeziehung $\lim_{x\to\infty}e^{-x} = 0$ folgt für die differenzierbare und daher auch stetige Funktion sinh, dass $\sup\sinh(\mathbb{R}) = \infty$ gilt. Mit $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ ergibt sich daraus auch $\inf\sinh(\mathbb{R}) = -\infty$. Weiter garantiert die strikte Positivität der Ableitung

$\sinh'(x) = \cosh x$, dass sinh eine samt Umkehrfunktion stetig differenzierbare bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ auf sich definiert. Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion besitzt die üblicherweise Ar sinh bezeichnete Umkehrfunktion von sinh aufgrund der Relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ die Ableitung

$$\operatorname{Ar}\sinh'(y) \;=\; \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Ar}\sinh y)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{Ar}\sinh y)}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,.$$

Die Funktion tanh und ihr Wertevorrat $\tanh(\mathbb{R}) =]-1,1[$ wurden bereits in **H30** bestimmt. Die strenge Positivität der Ableitung $\tanh' y = 1-\tanh^2(y)$ bestätigt noch einmal das strengmonotone Wachstum von tanh und die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion Ar tanh. Nach der Formel von oben gilt

$$\operatorname{Ar}\tanh'(y) \;=\; \frac{1}{\tanh'(\operatorname{Ar}\tanh y)} \;=\; \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{Ar}\tanh y)} \;=\; \frac{1}{1-y^2}\,.$$

Aufgabe 9

Wir berechnen die 2008.te Ableitung mithilfe der Leibniz-Formel. Es gilt:

$$f^{(2008)} = x^2(e^{cx})^{(2008)} + \binom{2008}{1}(x^2)'(e^{cx})^{(2007)} + \binom{(2008)}{2}(x^2)''(e^{cx})^{(2006)}$$

Die restlichen Summanden verschwinden, da hhere Ableitungen von x^2 gleich sind. Zusammen mit $x^2(e^{cx})^{(n)} = x^2c^ne^{cx}$ folgt somit:

$$f^{(2008)} = c^{2008}x^2e^{cx} + 2\cdot 2008\cdot c^{2007}xe^{cx} + 2\cdot 2008\cdot 2007\cdot c^{2006}e^{cx}$$

Aufgabe 10

a) Die Funktion $\quad f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right) \quad$ ist auf dem Intervall $J =]0,\infty[$ differenzierbar mit der (aus Ketten- und Produktregel gewonnenen) Ableitung

$$f'(x) \;=\; \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\cdot\left[\frac{-1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right] \;=\; x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\,.$$

Sie ist offensichtlich größer als Null, falls $0 < x < e$ gilt, gleich Null bei $x = e$ und kleiner als Null, falls $e < x < \infty$ gilt. Daher ist aufgrund des Monotoniekriteriums f strikt monoton wachsend im Intervall $0 < x \le e$ und strikt monoton fallend im Intervall $e \le x < \infty$. Insbesondere liegt bei $x = e$ ein isoliertes lokales Maximum von f.

b) Das Argument $\dfrac{\ln x}{x}$ der Exponentialfunktion in der Definition von f genügt am rechten Intervallende ∞ von J der Voraussetzung der zweiten l'Hôpitalschen Regel. Sie ergibt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} \;=\; 0\,; \quad \text{und daraus folgt} \quad \lim_{x\to\infty} x^{1/x} \;=\; e^0 \;=\; 1.$$

Am linken Intervallende von J gilt wegen $\quad \lim\limits_{x\searrow 0}\ln x = -\infty \quad$ erst recht $\quad \lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln x}{x} = -\infty$. Das ergibt wegen $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$ den Grenzwert $\quad \lim\limits_{x\searrow 0} x^{1/x} = 0.$

c) Aus der Tatsache $n^{1/n} = f(n)$ und mit dem unter Teil a) festgestellten Monotonieverhalten von f ist das Maximum von $\left(n^{1/n}\right)$ unter den beiden Zahlen $2^{1/2}$ und $3^{1/3}$ zu suchen. Ihre Differenz hat dasselbe Vorzeichen wie die Differenz der sechsten Potenzen. Für sie aber gilt $\left(2^{1/2}\right)^6 = 8 \ < \ \left(3^{1/3}\right)^6 = 9$. Mithin ist $f(3) = 3^{1/3}$ das Maximum der genannten Folge.

Aufgabe 11

Wir zeigen zunächst die gleichmäßige Stetigkeit der Wurzelfunktion.
Für $x, \Delta x > 0$ gilt die Abschätzung : $\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \leq \sqrt{\Delta x}$ (verschiebe Δx auf die rechte Seite und quadriere alles)

Für beliebiges $x, y > 0$ und $\Delta x = y - x$ wobei o.B.d.A. gelte $y > x$ folgt:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

was die gleichmäßige Stetigkeit der Wurzel-Funktion beweist.

Die Funktion $g(x) = x^2$ ist als Produkt der stetigen Funktionen $y = x$ bekanntlich stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass sie nicht gleichmäßig stetig ist, wählen wir ein festes $\varepsilon = 1$ und beweisen, dass hierzu kein $\delta > 0$ existiert.
Sei nun $\delta > 0$ beliebig und wähle $x = \frac{1}{\delta}$ sowie $y = \frac{1}{\delta} + \delta/2$, dann gilt:
$|x - y| = \delta/2 < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| = |\delta^2/4 + 1| > 1 = \varepsilon$

Aufgabe 12

a.) Betrachte die Funktion $f(x) = (x - 1) - Ln(x)$ für $x > 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x[1 - \frac{1}{x} - \frac{Lnx}{x}]) = +\infty$$

Nun berechnen wir die Extrema von f. Aus $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = o$ folgt: $x = 1$ ist ein möglicher Kandidat. Aufgrund der Grenzwertbetrachtung muss es sich um ein globales Minimum handeln und $f(x) = x - 1 - Lnx \geq f(1) = 0$

$$\Longrightarrow Lnx \leq x - 1 \ \text{ bzw. } \ Ln(x + 1) \leq x$$

Für die zweite Abschätzung verwenden wir die Funktion $g(x) = Lnx - (1 - \frac{1}{x})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x) = Lnx - (1 - \frac{1}{x}) &= -Ln(\frac{1}{x}) - 1 + \frac{1}{x} \\ &= (\frac{1}{x} - 1) - Ln(\frac{1}{x}) \\ &= f(\frac{1}{x}) \geq 0 \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq Lnx \ \text{ bzw. } \ 1 - \frac{1}{x + 1} \leq Ln(x + 1)$$

zusammen folgt also:

$$1 - \frac{1}{x + 1} \leq Ln(x + 1) \leq x$$

b.) Die Funktion $Ln(x+1)$ hat bekanntlich die Ableitung $\frac{1}{x+1}$.
Für diese Ableitung können wir jedoch sehr einfach mithilfe der geometrischen Reihe die Potenzreihendarstellung angeben.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Durch Integration dieser Potenzreihe erhalten wir:

$$Ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Mit der Abschätzung aus Teilaufgabe a.) $Ln(x+1) \leq x$ folgt nun für die Funktion $h(x)$:

$$h(x) = \frac{Ln(1+x) - x - x^2/2}{x} \leq -\frac{x}{2} \qquad \text{für } x > 0.$$