Repetitorium Analysis I für Physiker

Stetigkeit, Differentiation und Taylorpolynome

Aufgabe 1

Es sei $V = C([0,2])$. Ist die Menge $B = \{f \in V : \int\limits_0^2 f(t)t^2 dt < 5\}$ offen oder abgeschlossen? (Begründen Sie die Antwort)

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}$$

Zeigen Sie, dass die g_n stetig sind.
Folgt aus der Stetigkeit der $g_n(x)$ die Stetigketi von

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad ?$$

Falls nicht, für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert, bzw. stetig?

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $d(x) = \tan x - x$ im Intervall $0 < x < \pi/2$ überall größer als Null ist. Tipp: Anwendung des Mittelwertsatzes auf $[0, x]$.

b) Zeigen Sie, dass $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $0 < x < \pi/2$ streng monoton fällt.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie jeweils die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x^3}, \quad \lim_{x\to\infty} (\cos \frac{1}{x})^x, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\arcsin(\tan x) - \frac{\pi}{2}}$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \tan x}{x^3}$ durch Taylorentwicklung.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ zwar in ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist. Skizzieren Sie $f(x)$.

Aufgabe 6

Mithilfe der Gauss-Klammer $\lfloor y \rfloor$, die jedem $y \in \mathbb{R}$ das Maximum der $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq y$ zuordnet, wird die Funktion

$$\mathrm{zack}(x) = \left| \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - x \right|, \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion zack die Periode 1 besitzt und beschreiben Sie zack auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ durch eine bekannte Funktion.

b)Untersuchen Sie die Funktion zack auf Stetigkeit, Maxima und Minima.

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass die reelle Exponentialfunktion exp überall differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\frac{d\exp}{dx}(a) = \exp(a) \quad (a \in \mathbb{R})\,.$$

Hinweis: Die Standard-Abschätzung $e^x \geq 1 + x$ kann dabei sehr nützlich sein.

b) Zu jedem $\alpha \in \mathbb{C}$ wird die allgemeine Potenz x^α auf dem Intervall $\mathbb{R}_+^\times = \;]0, \infty[$ durch $x^\alpha = \exp\big(\alpha \ln x\big)\,, \quad x > 0$ definiert. Zeigen Sie, dass jede dieser Funktionen auf $\mathbb{R}_+^\times$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}\,.$$

Aufgabe 8

a) Bestimmen Sie die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x \;=\; \tfrac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big), \quad \cosh x \;=\; \tfrac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big), \quad \tanh x \;=\; \frac{\sinh x}{\cosh x}\,.$$

b) Berechnen Sie das Definitions-Intervall und die Ableitung der Umkehrfunktionen $\mathrm{Ar\,sinh}$ (Area sinus hyperbolicus) bzw. $\mathrm{Ar\,tanh}$ (Area tangens hyperbolicus) des hyperbolischen Sinus bzw. des hyperbolischen Tangens.

Aufgabe 9

Seien die unendlich oft differenzierbaren Funktionen f und g gegeben, dann gilt für die n-te Ableitung der Funktion fg die Leibniz Formel:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(x_0) \cdot f^{(n-k)}(x_0)$$

Berechnen Sie damit die 2008-te Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{cx} \quad (a \in \mathbb{R})$

Aufgabe 10

Zu untersuchen ist die auf $]0, \infty[$ durch $f(x) = x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln x\right)$ definierte Funktion f.

a) Bestimmen Sie über die Ableitung von f die Monotonie-Intervalle und die lokalen Extrema von f.

b) Untersuchen Sie die Existenz und gegebenenfalls die Werte der Limiten von $f(x)$ für $x \searrow 0$ und für $x \to \infty$.

c) Bestimmen Sie mit ausreichender Begründung das Maximum der Folge $\left(n^{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 11

a) Begründen Sie die folgende Abschätzung für den Logarithmus:

$$1 - \frac{1}{x+1} \leq Ln(x+1) \leq x \qquad (x > 0)$$

b) Berechnen Sie die Taylorreihe von $Ln(1 + x)$ und weisen Sie nach, dass die Funktion

$$h(x) = \frac{Ln(1 + x) - x - x^2/2}{x}$$

für $x > 0$ stets unterhalb der Geraden $y = -\frac{x}{2}$ verläuft.