Michael Schrapp

Vorlesung, Kapitel 3

Analysis I

Repetitorium Analysis I für Physiker

Skript
zu
Stetigkeit, Differenzierbarkeit
und Taylorreihen

1 Stetigkeit in $\mathbb{R}$

Definition 1.1 (abgeschlossen, beschränkt, kompakt)

- Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es eine Zahl R gibt so, dass $|z| < R$ ist für alle $z \in B$.
- Eine Teilmenge A von R heißt abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Punkten $a_n \in A$ ebenfalls in A liegt.
- Dagegen heißt eine Menge A offen, falls $\forall x \in A$ ein $\delta(x)$ existiert mit $]x-\delta, x+\delta[\subset A$
- Eine Menge $K \in \mathbb{C}$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
- $K \in \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)n \in N, x_n \in K$ eine Teilfolge besitzt die gegen einen Punkt in K konvergiert.

Definition 1.2 (Stetigkeit)
Es sei $I \subset \mathbb{C},\ f : D \mapsto \mathbb{C}$ und $a \in D$. f heißt in a stetig, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass gilt:

$$| f(x) - f(a) | < \epsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } | x - a | < \delta$$

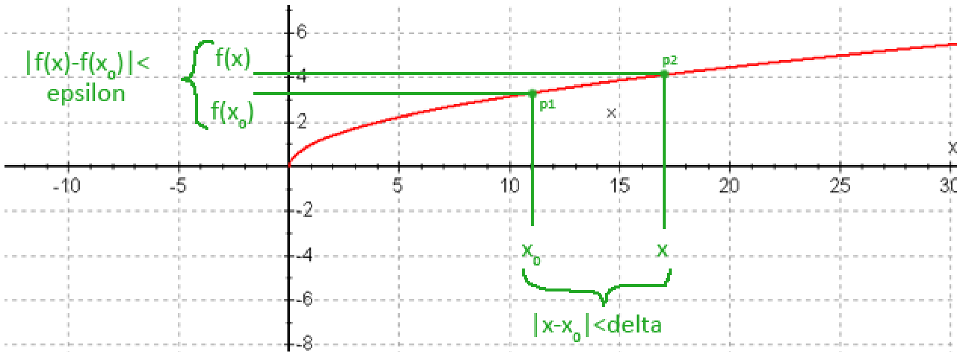

Abbildung 1: Veranschaulichung der ε, δ Definition

Satz 1.3 (Folgenkriterium für Stetigkeit)
Es sei wiederum $D \subset \mathbb{C},\ f : I \mapsto \mathbb{C}$ und $a \in D$. f heißt in a ebenfalls stetig, falls für eine beliebige Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a).$$

Sind 2 Funktionen f, g stetig auf einem Intervall I, so sind auch die Verknüpfungen $f+g, f\cdot g$ stetig.
Gilt zudem, dass $g(I) = I$, so ist auch $f \circ g$ stetig in I.

2 wichtige Sätze über kompakte bzw. offene Intervalle:

Satz 1.4
Das Bild $f(K)$ einer kompakten Menge $K \in \mathbb{C}$ unter einer stetigen Abbildung $f : K \to \mathbb{C}$ ist kompakt.

Satz 1.5
Das Urbild $f^{-1}(O)$ einer offenen (abgeschlossenen) Menge $O \in \mathbb{C}$ unter einer stetigen Abbildung $f : O \to \mathbb{C}$ ist offen (abgeschlossen).

1.1 Anwendungen

Satz 1.6 (Zwischenwertsatz)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Gilt speziell: $f(a) < 0$ und $f(b) > 0 \implies$ f hat mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$. (Nullstellensatz)

2 Differentiation in $\mathbb{R}$

Definition 2.1 (Ableitung einer Funktion)
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ auf einem Intervall I heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Sie heißt differenzierbar in I, falls sie in allen Punkten $x \in I$ differenzierbar ist.

Oft werden die folgenden Bezeichnungen für differenzierbare Funktionen verwendet:
Mit $C(I)$ werden alle stetigen Funktionen, mit $C^n(I)$ die n-mal stetig differenzierbaren Funktionen und mit $C^\infty(I)$ die beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf I bezeichnet.

Sind f, g differenzierbar, so gelten die folgenden Ableitungsregeln:

- Linearitt: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (cf)'(x) = cf'(x)$
- Produktregel: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Quotientenregel: $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Kettenregel:$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

Korollar 2.2
Ist $f : I \to \mathbb{C}$ in x_0 differenzierbar, so ist sie in x_0 auch stetig (aber nicht umgekehrt).

Beweis:
Aus dem Differenzialquotienten $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_o)$ folgt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_o)(x - x_0) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Satz 2.3 (Ableitung der Umkehrfunktion)
Sei $I \in \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to J$ eine stetige, streng monotone Funktion mit der Umkehrfunktion $g : J \to I$. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, mit:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Man kann diese Formel folgendermaßen verifizieren:
Da g die Umkehrfunktion zu f ist, gilt natürlich: $g(f(x_0)) = x_0$
Leiten wir dies mit der Kettenregel ab, so erhalten wir obiges Resultat.

Satz 2.4 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ so, dass gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

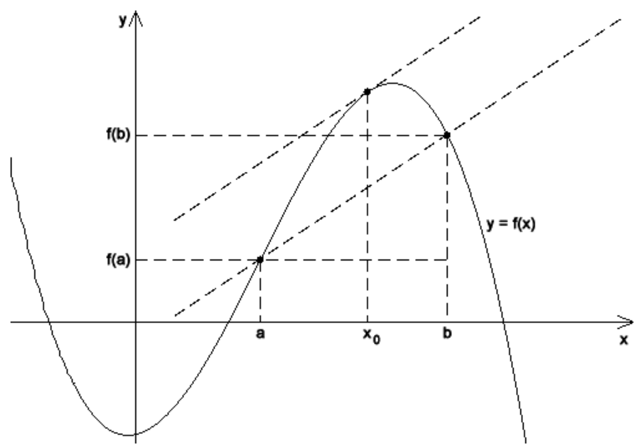

Abbildung 2: Veranschaulichung des Mittelwertsatzes

Korollar 2.5 (Satz von Rolle)
Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit$f'(\xi) = 0$.

Satz 2.6 (Extrema)
Gilt für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}(x_0 \in D)$:

$$f'(x_0) = 0 \text{ (notwendige Voraussetzung) und}$$

$$f''(x_0) > 0 (< 0) \text{(hinreichende Bedingung)}$$

$$\Longrightarrow f \text{hat in } x_0 \text{ ein lokales Minimum (Maximum)}$$

Satz 2.7 (l'Hopital)
Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \; \forall \; x \in]a, b[$. Es gelte

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad (\text{oder} = \infty)$$

Dann folgt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{Analoges gilt für } a \to \infty$$

Satz und Definition 2.8 (Konvexität)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f heißt konvex, falls:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \;\; \text{für} \;\; 0 \leq \lambda \leq 1$$
$$\Longleftrightarrow f''(x) > 0$$

Anderst ausgedrückt:
Eine Funktion heißt konvex im Intervall $[a, b]$, wenn der Graph für alle $x \in [a, b]$ unterhalb der Sekanten verläuft.

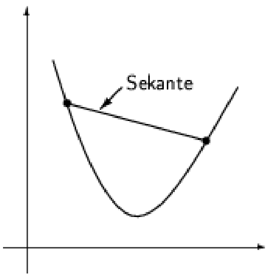

Abbildung 3: Bsp. einer konvexen Funktion

2.1 Funktionenfolgen

Definition 2.9 (Konvergenbegriffe)
Eine Funktionenfolge f_n **konvergiert punktweise** gegen f, falls

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \;\; \forall x \in I$$

Eine Funktionenfolge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen f, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \text{ unabhängig von } x$$

Satz 2.10 (stetige Funktionenfolgen)
Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $|f_n| \leq c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$
dann ist

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

stetig.

Sazt 2.11 (differenzierbare Funktionenfolgen)
Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelten folgende 2 Bedingungen:
(i) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist absolut konvergent
(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ ist absolut konvergent, mit $|f_n'| \leq c_n$und$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$
dann gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Anwendung: Potenzreihen
Für Potenzreihen treffen die Voraussetzungen von Satz 2.3 zu. ((i) ist klar, und (ii) beweist man durch das Quotientenkriterium.)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < R, R < 0 \text{ Konvergenzradius}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

3 Taylorentwicklung

Satz 3.1 (Taylorentwicklung)
Es sei $f : I \mapsto \mathbb{R}$ $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar, $x_0 \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x,x_0)$$

mit dem Restglied:

$$\text{(Cauchy)} \quad R_{n+1}(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\eta) \text{ mit } \eta \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x.$$

$$\text{(Integralform)} \quad R_{n+1}(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

wobei für x gegen x_0 das Restglied schnell nach 0 abfällt. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_n}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$

Definition 3.2 (Landau-Symbole)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann definiert man:

- $f \in O(g)$, wenn $0 \leq \limsup\limits_{x\to\infty} \mid \frac{f(x)}{g(x)} \mid < \infty$
- $f \in o(g)$, wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \mid \frac{f(x)}{g(x)} \mid < 0$

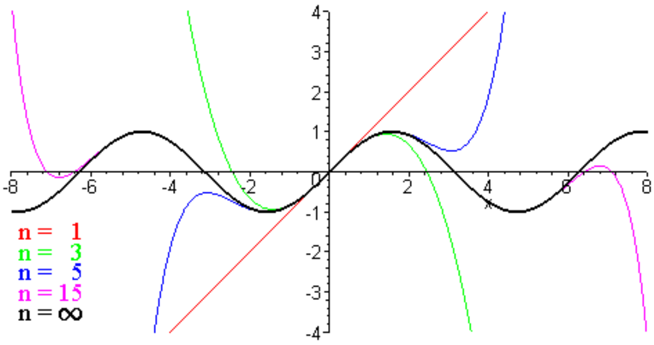

Abbildung 4: Taylorapproximation an die Sinus Funktion