Repetitorium Analysis I für Physiker

Unendliche Reihen

1. Wissensabfragen

   (a) Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

   i. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq n > N : |\sum_{k=n}^{m} a_k| \geq \varepsilon$
   Falsch. Fast richtig. Man vergleiche dies mit dem Cauchy-Kriterium.

   ii. $\exists s : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |\sum_{k=1}^{n} a_k - s| < \varepsilon$
   Richtig. Setzt man die Partialsummen der Reihe in das Kriterium für Folgenkonvergenz ein, so erhält man diese Aussage.

   iii. $(|a_k|)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.
   Falsch. Ist (a_k) alternierend, so konvergiert die Folge nach dem Leibnizkriterium. Ist (a_k) jedoch nicht alternierend, so sind die Partialsummen nicht notwendigerweise beschränkt. Die Reihe konvergiert daher im Allgemeinen nicht.

   iv. $\forall k : |a_k| < 2^{-k}$
   Richtig. Da 2^{-k} eine absolut konvergente Reihe ist und $|a_k| < 2^{-k}$, sind die Voraussetzungen für die Konvergenz nach dem Majorantenkriterium gegeben. Die Reihe ist sogar absolut konvergent.

   (b) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind korrekt?

   i. Ist eine Reihe konvergent, so ist sie auch absolut konvergent.
   Falsch. Beispielsweise ist die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konvergent (gegen $\ln 2$). Die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ ist jedoch divergent.

   ii. Bei bedingt konvergenten Reihen spielt die Reihenfolge der Reihenglieder keine Rolle.
   Falsch. Diese Aussage ist genau konträr zum Satz 4.2 in der Vorlesung! Eine bedingt kovnergente Reihe ist eine Reihe die zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Ein Beispiel dafür, dass bei einer solchen Reihe die Ordnung der Reihenglieder relevant ist, wurde in der Vorlesung behandelt.

   iii. Sind $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihen.
   Konvergieren die Reihen in x absolut, so gilt:

   $$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$$

   Richtig. Die Reihen sind absolut konvergent, d.h. wir können sie nach Satz 4.4 aus der Vorlesung als

   $$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k x^{n+k}$$

   Man mache sich nun bewusst, dass die Form $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ lediglich eine Umordnung der Reihenglieder bedeutet. Diese Umordnung ist gestattet, da die Reihe absolut konvergent ist. Die Form $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ ist übrigens das sog. Cauchyprodukt der Potenzreihen.

   iv. Eine gleichmässig konvergente Funktionenreihe ist auch punktweise konvergent.
   Richtig. Da die Konvergenz von Funktionenreihen auf der Konvergenz der Partialsummenfolge beruht, gilt für Funktionenreihen das selbe wie für Funktionenfolgen: Aus gleichmässiger Konvergenz folgt die punktweise Konvergenz.

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

   (a)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$$

   Lösbar z.B. mit dem Quotientenkriterium:

   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)^2}}{n^2 e^{-n^2}} = (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) e^{-(2n+1)} \underset{n\to\infty}{=} 1 \cdot 0 = 0 < 1$$

   Die Reihe ist also konvergent.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Die Reihe divergiert, da eine divergente Minorante (die harmonische Reihe) existiert:

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n}{n+1}$$

Die Reihe ist alternierend, mit $a_n = \ln \dfrac{n}{n+1} < 0$ für $n > 0$. Ausserdem bildet a_n eine Nullfolge, da

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \ln \frac{1}{1+1/n} = \ln 1 = 0$$

Die a_n sind zudem noch monoton fallend, wegen

$$a_{n+1} - a_n = \ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{n}{n+1} = \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \ln \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \ln 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 0$$

Die Bedinungen für das Leibnizkriterium sind somit erfüllt, die Reihe ist konvergent.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$$

Die Reihe ist Konvergent, da z.B

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ eine Majorante ist

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Majorante ist

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$$

Die Reihe ist diverent, da $(-1)^n \frac{n+1}{2n}$ keine Nullfolge ist.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Die Reihe hat eine Minorante:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n)} > \frac{1}{(\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}+n)} = \frac{1}{2n+1}$$

Diese Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ ist divergent. Somit ist auch die Reihe divergent.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Nach der in der Vorlesung gegebenen Formel (Konvergenzkriterium nach Cauchy-Hadamard) ist der Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{0} = \infty \; ,$$

da der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ gegen ∞ geht. Die Reihe konvergiert für alle x. Dies ist übrigens die Reihe für die Exponentialfunktion.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Der Konvergenzradius ist

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^{n+1}|}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Diese Reihe ist die Entwicklung von $\ln(1+x)$ um $x = 0$. Andere Werte der Logarithmusfunktion ausserhalb $(0, 2)$ müssen z.B. durch Anwendung der Funktionalgleichung bestimmt werden.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$$

Der Konvergenzradius ist gegeben durch:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{2}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$$

Nach dem Wurzelkriterium muss gelten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^{5n+1}|}{1+2^n}} < 1$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^{5n+1}|}{1+2^n}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{|x^{5+\frac{1}{n}}|}{\sqrt[n]{1+2^n}} = \frac{|x|^5}{2} \ ,$$

ist der Konvergenzradius $r = \sqrt[5]{2}$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} x^n$$

Der Konvergenzradius ist gegeben durch:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \sqrt{(3n-2)2^n}}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{3\sqrt{2}\,\sqrt[2n]{3n-2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \ ,$$

wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3n-2} \underset{n\to\infty}{=} \sqrt[2n]{3}\,\sqrt[2n]{n-2/3} \underset{n\to\infty}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

Hier ist der Konvergenzradius gegeben durch

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}}$$

Es ist zu beachten, dass hier unbedingt der Limes superior, wie auch in der Vorlesung genannt, zu verwenden ist. Dies liegt daran, dass kein Grenzwert existiert; es existieren allerdings zwei Häufungspunkte, von denen der grössere verwendet wird. Weiterhin gilt:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{(2+(-1)^n)}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}$$

Der Konvergenzradius beträgt somit $\frac{1}{3}$

4. Bestimmen sie die Werte der folgenden Reihen.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Es gilt

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

(letzter Schritt Partialbruchzerlegung)
Der Wert der Reihe ist also

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Man beachte $2n+1 = 2(n+1)-1$, d.h alle Terme ausser dem ersten Term des ersten Reihengliedes löschen sich gegenseitig aus.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$$

Man verwende hier die Reihe für die e-Funktion:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dann folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2(e^2-1)$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

nach Partialbruchzerlegung. Da $\frac{1}{3(n+1)-2} = \frac{1}{3n+1}$, löscht sich alles ausser der erste Term des ersten Reihengliedes aus! Der Wert der Reihe beträgt also $\frac{1}{3}$.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n/2} 2^{1-n}$$

Diese Reihe kann ganz einfach auf die geometrische Reihe zurückgeführt werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n/2} 2^{1-n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 1\right] = 2\left[\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right] = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

5. Bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f : x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]}$$

Zunächst beweisen wir durch vollständige Induktion, dass die Formel für die Partialsummen durch

$$s_n = \frac{nx}{nx+1}$$

gegeben ist. für $n=1$ gilt offensichtlich

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{[(1-1)x+1][x+1]}$$

Der Schritt von $n \to n+1$:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} = \frac{nx}{nx+1} + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]}$$

$$= \frac{nx[(n+1)x+1]+x}{[nx+1][(n+1)x+1]} = \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1}$$

Nach Grenzwertbildung sieht die Grenzfunktion wiefolgt aus:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

Konvergiert die Reihe gleichmässig in $\mathbb{R}$?
Die Reihe konvergiert nicht gleichmässig, da die Grenzfunktion eine Unstetigkeit bei $x = 0$ hat. Da die Partialsummen jedoch stetig sind für $0 \leq x \leq \infty$, müsste bei gleichmässiger Konvergenz auch die Grenzfunktion in diesem Intervall stetig sein.