Repetitorium Analysis I für Physiker

Unendliche Reihen

1. Wissensabfragen
   (a) Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?
      i. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq n > N : |\sum_{k=n}^{m} a_k| \geq \varepsilon$
      ii. $\exists s : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |\sum_{k=1}^{n} a_k - s| < \varepsilon$
      iii. $(|a_k|)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.
      iv. $\forall k : |a_k| < 2^k$
   (b) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind korrekt?
      i. Ist eine Reihe konvergent, so ist sie auch absolut konvergent.
      ii. Bei bedingt konvergenten Reihen spielt die Reihenfolge der Reihenglieder keine Rolle.
      iii. Sind $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihen. Konvergieren die Reihen in x absolut, so gilt:
      $$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$$
      iv. Eine gleichmässig konvergente Funktionenreihe ist auch punktweise konvergent.

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n}{n+1}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} x^n$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} x^n$

4. Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n/2} 2^{1-n}$

   Hinweis: In manchen Fällen ist es sinnvoll, die Reihe auf bereits bekannte Reihen zurückzuführen.

5. Bestimmen Sie die Grenzfunktion
   $$f : x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]}$$
   Konvergiert die Reihe gleichmässig in $\mathbb{R}$?
   Hinweis: Beweisen Sie zunächst durch vollständige Induktion, dass die Formel für die Partialsummen durch
   $$s_n = \frac{nx}{nx+1}$$
   gegeben ist.