Ferienkurs Analysis 1, SoSe 2008

Unendliche Reihen

Florian Beye

August 15, 2008

1 Reihen und deren Konvergenz

Definition 1.1. Eine reelle bzw. komplexe *Reihe* ist eine unendliche Summe über die Glieder einer Folge (a_k) mit $a_k \in \mathbb{R}$ bzw. $a_k \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die a_k heissen *Reihenglieder*. Durch die $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ wird nun eine neue Folge (s_n) definiert, deren Glieder die *Partialsummen* der Reihe genannt werden.

Mit Hilfe der Partialsummen lässt sich der obige Grenzwertprozess auch als $\lim_{n\to\infty} s_n$ schreiben, es handelt sich hierbei also um den bereits bekannten Grenzwertbegriff für Folgen. Konvergiert die Folge der Partialsummen, so ordnen wir der Reihe einen festen Wert s zu und nennen die Reihe *konvergent*. Andernfalls heisst die Reihe *divergent*. Die verwendete Notation ist hierbei analog zu derjenigen bei Folgen.

Die obige Schreibweise für Reihen kürzen wir auch durch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ oder $\sum_k a_k$ ab.

Satz 1.2. *Konvergieren die Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ so gilt*

1. $\sum_k(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_k a_k + \beta \sum_k b_k$.
2. $\sum_k \bar{a}_k = \overline{\sum_k a_k}$

Beweis. Der Satz folgt direkt aus den Rechenregeln für Folgen. Seien die Partialsummenfolgen durch $s_n = \sum_k^n a_k$ und $t_n = \sum_k^n b_k$ gegeben. Da (s_n) und (t_n) konvergieren, ist auch jede Linearkombination der beiden Folgen konvergent.
1. Es gilt also:

$$\alpha \sum_k a_k + \beta \sum_k b_k \ = \lim_{n\to\infty} \alpha s_n + \lim_{n\to\infty} \beta t_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha s_n + \beta t_n) = \sum_k (\alpha a_k + \beta b_k)$$

2. Da s_n konvergiert, konvergieren auch $\operatorname{Re} s_n$ und $\operatorname{Im} s_n$ und daher auch $-\operatorname{Im} s_n$. Es konvergiert daher auch $\sum_k \bar{a}_k$, und zwar aufgrund des ersten Teils dieses Satzes gegen $\overline{\sum_k a_k}$. □

Da die Konvergenz einer Reihe allein über die Konvergenz der Partialsummenfolge bestimmt ist, lässt sich auch das Cauchy-Kriterium auf Reihen übertragen. *Zur Erinnerung:* Das Cauchy-Kriterium ist für reelle und komplexe Folgen äquivalent zur Definition der Folgenkonvergenz.

Cauchy-Kriterium. *Eine Reihe* $\sum_k a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* N *existiert, sodass gilt* $\forall n, m \geq n > N : |\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon$.

Beweis. Setzt man die Reihe in das Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge ein, so erhält man:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > n > N : \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \; .$$

Wenn wir nun in dieser Aussage die Ersetzungen $n \to n - 1$ und $N \to N - 1$ vornehmen, erhalten wir die obige Behauptung. □

Bemerkung. Untersuchen wir das Cauchykriterium doch noch einmal etwas genauer: Wenn für alle n und für alle $m \geq n > N$ gilt, dass $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon$, so gilt mit $m = n$ erst recht $|a_n| < \varepsilon$. Dies ist aber gerade das Konvergenzkriterium für eine Nullfolge! Folglich **bilden bei bei jeder konvergenten Reihe die Reihenglieder a_k eine Nullfolge**.

Es ist allerdings wichtig zu wissen, dass nicht die Umkehr dieser Aussage gilt: **Ist (a_k) eine Nullfolge, so ist die Reihe $\sum_k a_k$ nicht automatisch konvergent!** Das kanonische Beispiel für eine solche Reihe ist die Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, die divergiert, obwohl ihre Glieder eine Nullfolge bilden.

Wichtig in unseren weiteren Untersuchungen ist auch der Begriff der *absoluten Konvergenz*:

Definition 1.3. Eine Reihe $\sum_k a_k$ heisst *absolut konvergent*, wenn $\sum_k |a_k|$ konvergent ist. Desweiteren heisst eine Reihe *bedingt konvergent*, wenn diese zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

Satz 1.4. *Ist eine Reihe* $\sum_k a_k$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Nach dem Cauchy-Kriterium und der Definition für absolut konvergente Reihen gibt es für jedes positive ε ein N, für das gilt, dass

$$\forall n, m \geq n > N : \left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon \; . \qquad (1)$$

Die Dreiecksungleichung besagt, dass

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \; .$$

Setzt man dies nun in Aussage (1) ein, so erhält man das Cauchy-Kriterium für die Reihe. Sie ist also konvergent. □

Bevor wir die wichtigsten Konvergenzkriterien herleiten, gilt ohne Beweis der folgende

Satz 1.5. *Das Hinzufügen, Entfernen, Ändern und Umordnen endlich vieler Reihenglieder ändert das Konvergenzverhalten einer Reihe* $\sum_k a_k$ *nicht. Es gilt also*

1. *Ist die Reihe konvergent (divergent), bleibt diese auch nach der Abänderung konvergent (divergent).*

2. *Ist die Reihe absolut konvergent, so bleibt sie auch nach der Abänderung absolut konvergent.*

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt, dass wenn die Konvergenz, Divergenz oder absolute Konvergenz einer Reihe ab einem gewissen Index i gezeigt ist, diese auch für die gesamte Reihe bestehen bleibt.

Dies ist nützlich, um die Voraussetzungen, die gewisse Konvergenzkriterien an eine Reihe stellen, abzuschwächen: Es reicht aus, wenn diese Voraussetzungen nur für *fast* alle, d.h. unendlich viele Indizes gelten, denn dann existiert ein Index i, so dass die Voraussetzungen für alle $k > i$ erfüllt sind.

Wir beweisen nun zwei wichtige Konvergenzkriterien:

Satz 1.6. *Eine reelle Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert absolut, wenn die Folge ihrer Partialsummen (s_n) beschränkt ist und zwischen den Reihengliedern a_k keine Vorzeichenwechsel stattfinden.*

Beweis. Benennen wir die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_k |a_k|$ mit t_n. Da die Vorzeichen der a_k sich nicht unterscheiden, gilt

$$t_n = \sum_k^n |a_k| = |\sum_k^n a_k| = |s_n| \ .$$

Da (s_n) beschränkt ist, folgt somit die Beschränktheit von (t_n). Die Folge (t_n) ist ausserdem monoton wachsend, da

$$t_{n+1} - t_n = |a_{n+1}| \geq 0 \ .$$

Aufgrund der Beschränktheit und der Monotonie folgt nun aus dem Satz von Bolzano-Weierstrass, dass (t_n) konvergiert. Die Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert daher absolut. □

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. *Ist (a_k) eine monotone reelle Nullfolge, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.*

Beweis. Da (a_k) eine monotone Nullfolge ist, gibt es keine Vorzeichenwechsel zwischen den einzelnen Folgengliedern. Wir nehmen nun o.B.d.A an, dass (a_k) monoton fallend ist. Die Folgenglieder sind dann also nicht negativ.

Sei (s_n) die Partialsummenfolge der Reihe. Wir betrachten nun die zwei Teilfolgen (s_{2n}) und (s_{2n+1}). Da (a_k) monoton fällt, ist wegen

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0$$

die Teilfolge (s_{2n}) monoton fallend, und wegen

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} > 0$$

die Teilfolge (s_{2n+1}) monoton wachsend. Ausserdem gelten für diese Teilfolgen folgende Schranken:

$$s_{2n} = \sum_{k=0}^{n} (a_{2k} - a_{2k+1}) \geq 0$$

$$s_{2n+1} = a_0 - \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} - a_{2k}) \leq a_0$$

Aus Schranke und Monotonie folgt wieder (Bolzano-Weierstrass), dass sowohl (s_{2n}) und (s_{2n+1}) konvergieren. Da nach den Rechenregeln für Folgen gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 ,$$

ist der Grenzwert der beiden Teilfolgen identisch.

Aufgrund der Tatsache, dass es keine weitere divergente Teilfolge von (s_n) geben kann, konvergiert auch die ganze Folge s_n gegen diesen Grenzwert. □

2 Vergleichskriterien

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie man aus den Konvergenzeigenschaften einer bekannten Reihe Aussagen über das Konvergenzverhalten anderer Reihen ableiten kann.

Satz 2.1 (Majorantenkriterium)**.** *Gegeben seien eine absolut konvergente Reihe $\sum_k a_k$ und eine Reihe $\sum_k b_k$. Gilt nun für fast alle k, dass $|b_k| \leq |a_k|$ ist, so ist die zweite Reihe ebenfalls absolut konvergent.*

Beweis. Wenn für fast alle k gilt, dass $|b_k| \leq |a_k|$, so gibt es einen Index i, ab dem alle $|b_k| \leq |a_k|$ sind. Nach dem Cauchy-Kriterium existiert nun für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \geq i$, sodass

$$\forall n, m \geq n > N : \left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ausserdem folgt aus der Behauptung, dass gilt

$$\sum_{k=n}^{m} |b_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| .$$

Setzt man dies in die Aussage (2) ein, so erhält man das Cauchy-Kriterium für die absolute Konvergenz der zweiten Reihe ab dem Index i. Nach Satz 1.5 ist damit auch die gesamte Reihe $\sum_k b_k$ absolut konvergent. □

Während das Majorantenkriterium benutzt wird, um die Konvergenz einer Reihe zu zeigen, so wird das sog. *Minorantenkriterium* benutzt, um die divergenz einer Reihe zu zeigen.

Satz 2.2 (Minorantenkriterium)**.** *Gegeben seien eine divergente Reihe $\sum_k a_k$ und eine Reihe $\sum_k b_k$. Gilt nun für fast alle k, dass $|b_k| \geq |a_k|$ ist und b_k das Vorzeichen nicht ändert, so ist auch die zweite Reihe divergent.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Majorantenkriteriums: Es gibt einen Index i, ab dem alle $|b_k| \geq |a_k|$ sind und b_k das Vorzeichen nicht ändert. Nach dem logisch *negierten* Cauchy-Kriterium existiert nun ein ε, sodass für alle $N \geq i$ gilt, dass

$$\exists n, m \geq n > N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \geq \varepsilon. \tag{3}$$

Ausserdem gilt nach Behauptung und unter Zuhilfenahme der Dreiecksungleichung:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| = \sum_{k=n}^{m} |b_k| \geq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \geq \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| .$$

Das Gleichheitszeichen links folgt hierbei aus der Voraussetzung, dass für alle $k > i$ die b_k nicht das Vorzeichen wechselt. Setzt man dies nun in die Aussage (3) ein, so erhält man das *negierte* Cauchy-Kriterium für die zweite Reihe ab dem Index i. Nach Satz 1.5 ist damit also auch die gesamte Reihe $\sum_k b_k$ divergent. $\square$

Nun machen wir uns das Majorantenkriterium zu Nutze, um zwei weitere wichtige Konvergenzkriterien herzuleiten. Dazu verwenden wir die *geometrische Reihe*:

Beispiel (Geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{C}$. Die geometrische Reihe ist dann definiert durch:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Die Partialsummen lassen sich für $q \neq 1$ darstellen durch

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ . (Beweis durch vollständige Induktion)}$$

1. Fall $|q| > 1$ oder $q = -1$: Die Partialsummenfolge divergiert, weil q^{n+1} im Grenzwert entweder alterniert oder gegen ∞ geht. Die Reihe divergiert also.

2. Fall $|q| < 1$: Nun ist $\lim_{n\to\infty} \ s_n = \frac{1}{1-q}$. Die Reihe konvergiert also absolut, da $|q^k| = |q|^k$.

3. Fall $q = 1$: Die Partialsummen schreiben sich als $s_n = n$, was für $n \to \infty$ divergiert.

Satz 2.3 (Quotientenkriterium)**.** *Gegeben sei ein Reihe $\sum_k a_k$. Wir definieren $q =: \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$. Nun gilt:*

1. Ist $q > 1$ so divergiert die Reihe.

2. Ist $q < 1$ so konvergiert sie absolut.

Beweis. 1. Ist $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ so wachsen ab einem bestimmten Index die $|a_n|$ monoton an. D.h. (a_n) ist keine Nullfolge, womit die Reihe divergiert. 2. Wir nehmen für $\sum_k a_k$ die geometrische Reihe als Majorante. Es muss also einen Index i geben, so dass für alle $n > i$ gilt:

$$\exists q : |a_n| \leq |q|^n < 1$$

Gilt diese Bedingung für ein bestimmtes $n > i$, so muss sie also auch für $n \to n + 1$ gelten:

$$\exists q : |a_{n+1}| \leq |q|^{n+1} < 1$$

Dividiert man beide Gleichungen durcheinander so erhält man für $a_n \neq 0$ die äquivalente Bedingung:

$$\exists q : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq |q| < 1 \ ,$$

welche wiederum für alle $n > i$ gelten muss. Da auch diese Bedingung für $n \to n+1$ gelten muss, hat sie auch im Limes $n \to \infty$ zu gelten, was der Behauptung entspricht. □

Satz 2.4 (Wurzelkriterium)**.** *Gegeben sei ein Reihe* $\sum_k a_k$*. Wir definieren* $q =: \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$*. Nun gilt:*

1. *Ist* $q > 1$ *so divergiert die Reihe.*

2. *Ist* $q < 1$ *so konvergiert sie absolut.*

Beweis. 1. Ist $q > 1$ so gibt es unendlich viele a_k die grösser als 1 sind. die a_k bilden also keine Nullfolge. 2. Analog zum Quotientenkriterium nehmen wir für $\sum_k a_k$ die geometrische Reihe als Majorante. Es muss also einen Index i geben, sodass für alle $n > i$ die Bedingung:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt. Gilt die Bedingung nun für ein bestimmtes $n > i$, so muss diese auch für $n \to n+1$ gelten. Das heisst allerdings wiederum, dass sie im Limes für $k \to \infty$ gelten muss, was uns zur Behauptung führt. □

Bemerkung. Die Verwendung des Limes superior rührt daher, dass die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ auch unbestimmt divergieren kann, d.h dass sie mehrere unterschiedliche Häufungspunkte haben kann. In diesem Fall interessiert uns lediglich der *grösste* Häufungspunkt, denn wenn dieser kleiner 1 ist, dann sind auch alle anderen kleiner 1.

Bemerkung. Tritt beim Wurzel- oder Quotientenkriterium $q = 1$ auf, so ist nichts über die Konvergenz der Reihe gesagt. Es müssen andere Methoden angewandt werden, um die Konvergenzfrage zu klären. Es sei ausserdem noch angemerkt, dass das Wurzelkriterium leistungsfähiger als das Quotientenkriterium ist, d.h es gibt Reihen, bei denen das Wurzelkriterium eine Aussage treffen kann, das Quotientenkriterium jedoch nicht.

3 Funktionenreihen und Potenzreihen

Definition 3.1. Eine Funktionenreihe ist eine Reihe über Funktionen $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und hat die Gestalt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \ .$$

Analog zur Definition von ordinären Reihen im reellen oder komplexen ordnen wir Funktionenreihen eine Partialsummenfolge $s_n : x \to \sum_{k=1}^{n} f_k$ und eine Grenzfunktion $f : X \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f : x \to \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ zu. Da die Konvergenzeigenschaft der Folge $(s_n(x))$ offensichtlich vom Argument x abhängt, ist die Grenzfunktion im Allgemeinen nur für Teilmengen aus $\mathbb{C}$ definiert. Die Menge $X \in \mathbb{C}$ auf der die Funktionenfolge $\lim_{n\to\infty} s_n$ punktweise konvergiert nennen wir den Konvergenzbereich der Reihe. Die Reihe heisst dann auch punktweise konvergent in X. Konvergiert die Partialsummenfolge gleichmässig in einem Teilintervall aus X, so nennen wir sie gleichmässig konvergent in diesem Intervall.

Definition 3.2. Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe von der Gestalt:

$$f : x \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ .$$

Mithilfe des Wurzelkriteriums leiten wir eine Bedingung für den Konvergenzbereich von Potenzreihen ab:

Satz von Cauchy-Hadamard. *Sei* $q = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$. *Dann konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *punktweise absolut im offenenen Intervall* $(-q, q)$.

Beweis. Wenden wir das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ an, so folgt, dass die Reihe absolut konvergiert, wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$, also

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist. □

Eine ähnliche Bedingung lässt sich auch aus dem Quotientenkriterium herleiten.

4 Absolut konvergente Reihen

Satz 4.1. *Sei* $\sum_k a_k$ *eine konvergente Reihe. Durch Umgruppieren der Glieder ändert sich der Wert der Reihe nicht.*

Beweis. Das Umgruppieren der Glieder wählt aus der Partialsummenfolge eine Teilfolge aus. Da die Partialsummenfolge aber konvergiert, so muss auch jede ihrer Teilfolgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. □

Beispiel. Die Umgruppierung $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots$ einer konvergenten Reihe $\sum_k a_k$ wählt aus der Partialsummenfolge (s_n) die Teilfolge (s_{2n}) aus, welche ebenfalls konvergent ist und gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Dass der obige Satz im Allgemeinen nicht für divergente Reihen gilt zeigt folgendes

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}(-1)^k$ divergiert, da die Partialsummen unbestimmt divergieren. Gruppiert man die Reihenglieder jedoch wiefolgt:

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$$

so konvergiert die Reihe gegen Null. Gruppiert man sie auf diese Weise:

$$-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

so konvergiert die Reihe gegen -1. Durch das Umgruppieren haben wir also zwei Teilfolgen ausgewählt, die gegen die beiden Häufungspunkte der Partialsummenfolge -1 und 0 konvergieren.

Es ist wichtig zu wissen, dass nicht jede beliebige *Umordnung* von Gliedern einer konvergenten Reihe deren Wert unverändert lässt. Dies gilt nur für absolut konvergente Reihen (ohne Beweis).

Satz 4.2. *Sei $\sum_k a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Beliebiges Umordnen der Glieder ändert den Wert der Reihe nicht.*

Bemerkung. Ist die Reihe $\sum_k a_k$ nur bedingt konvergent, so existiert stets eine Umordnung, so dass die Reihe einen beliebigen Wert annimmt (Riemannscher Umordnungssatz). Man betrachte dazu folgendes

Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, ist aber nicht absolut konvergent. Ihr Grenzwert ist $\ln 2$. Durch Gruppieren von jeweils zwei aufeinanderfolgenden Gliedern erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\,(2k-1)} \ , \tag{4}$$

welche nach Satz 4.1 gegen den selben Wert konvergiert. Ordnen wir nun die ursprüngliche Reihe so um, dass auf ein positives Glied zwei negative folgen:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k\,(2k-1)} \ , \end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn wir dies mit Gleichung (4) vergleichen, offensichtlich nur den halben Wert der ursprünglichen Reihe.

Aus Satz 4.2 folgen noch folgende nützliche Sätze (ohne Beweis):

Satz 4.3. *Ist $\sum_k \sum_j a_{j,k}$ absolut konvergent, so ist auch $\sum_j \sum_k a_{j,k}$ absolut konvergent und hat den selben Wert.*

Satz 4.4. *Sind $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ absolut konvergent, so ist $(\sum_k a_k) \cdot (\sum_k b_k) = \sum_j \sum_k a_j b_k = \sum_k \sum_j a_j b_k$*