Analysis 1 – Montag – Lösungen

Maximilian Fischer

18.08.2008

1 Induktion

1. Man zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 := 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Induktion über n.

(IA) $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$ ✓

(IS) $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \underbrace{=}_{(IV)} \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + (n+1)^2 = (n+1) \cdot (\frac{1}{6} n \cdot (2n+1) + (n+1)) =$

$\frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot \underbrace{(n \cdot (2n+1) + 6n + 6)}_{2n^2+7n+6} = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)$ □

2. Man zeige für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) := (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

Induktion über n.

(IA) Linke Seite: $(1+x) \cdot (1+x^2) = 1 + x^2 + x + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$

Rechte Seite: $\frac{1-x^4}{1-x}$ ✓

(IS) $\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + x^{2^k}\right) \underbrace{=}_{(IV)} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot (1 + x^{2^{n+1}}) = \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}$ □

3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rekursiv definiert durch $a_1 := a$ und

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{1 + a_n^2} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Warum ist diese rekursive Definition sinnvoll?

b) Man berechne jeweils a_1, a_2, a_3, a_4 für $a = 2, a = 1/2$ und $a = 1$.

c) Sei $a \geq 0$. Man zeige $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots$.

d) Wie ist a zu wählen, damit für alle natürlichen Zahlen n die Beziehungen $a_n > 0$ und $a_n > a_{n+1}$ gelten? (Beweis!)

e) Für welche Wahl von a kann in Nr. 3d "$>$" jeweils durch eine der Relationen "$<$", "$=$" oder "$\leq$" ersetzt werden? Wie lauten die a_n im Fall "$=$"? (Beweise!)

f) Sei $a > 0$. Warum sind die Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ durch

$$b_n := \frac{1}{a_n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

sinnvoll definiert? Man stelle eine Rekursionsformel für die b_n mit einem geeigneten "Startwert" $b, b_1 := b$, auf.

a) Die Terme dieser Folge würden bei expliziter Konstruktion für große n viel zu kompliziert werden. Die rekursive Darstellung bleibt dagegen kompakt.

b)

a	a_1	a_2	a_3	a_4
2	2	2/5	10/29	290/941
1/2	1/2	2/5	10/29	290/941
1	1	1/2	2/5	10/29

c) Beweis durch Induktion über n.

(IA) $n = 1 \qquad a_1 = a \geq 0$ ✓

(IS) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\underbrace{1 + \underbrace{a_n^2}_{\geq 0}}_{\geq 1}} \leq a_n$ □

d) Für $a > 0$ folgt $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ wie oben.

e) Für "$<$" und "$\leq$" wie oben, nur muss beachtet werden, dass wegen des Vorzeichens nun $a_{n+1} > a_n \quad (\geq a_n)$ gilt.

f) $b_n := \frac{1}{a_n} \forall n \in \mathbb{N} \qquad b_{n+1} := \frac{1+b_n^2}{b_n}$

2 Reelle Zahlen, Intervalle

1. Schon die Pythagoräer des 5. Jahrhunderts v. Chr. erkannten, dass es auf jeder Strecke Punkte gibt, die diese in keinem ganzzahligen Verhältnis teilen, z.B. die Punkte des goldenen Schnittes. Ein Punkt P teilt eine Einheitsstrecke OE gemäß dem goldenen Schnitt, wenn für die Längen $h = \overline{OP}$ und $1 - h = \overline{PE}$ gilt:

$$1/h = h/(1-h), \quad \text{also} \quad h^2 = 1 - h \qquad (\star).$$

Man zeige mit Hilfe von Satz 24 aus der Vorlesung, dass genau ein $h > 0$ mit der Eigenschaft $(\star)$ existiert. Warum gilt für $g := h^{-1}$

$$g^2 = 1 + g, \qquad g = 1 + h \ ?$$

g heißt *goldener Schnitt*. Man zeige, dass g keine rationale Zahl ist.

$h^2 + h - 1 = 0 \Rightarrow h_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
h kann nicht negativ werden (da Strecke) und $\sqrt{5}$ ist eindeutig.
$g = \frac{1}{h} = \frac{h}{h^2} = \frac{h}{1-h} \Rightarrow (1-h) \cdot \frac{1}{h} = h \Rightarrow g - hg = h \Rightarrow g = 1 + h$
$1 + g = 1 + \frac{1}{h} = \frac{h+1}{h} = \frac{h^2+h}{1-h} = \frac{1}{1-h} = \frac{1}{h^2} = g^2$
Zur Irrationalität von g: Angenommen, g wäre eine rationale Zahl. Dann könnten wir sie als a/b mit $a, b \in \mathbb{N}$ und teilerfremd schreiben.

$$g = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{g} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a(a-b) = b^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Das impliziert aber, dass a/b zu $b/(a-b)$ gekürzt werden könnte, was ein Widerspruch zu a und b teilerfremd ist.

2. Warum bilden die Intervalle

$$I_n := \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eine Intervallschachtelung? Man bestimme

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Zeige die Intervallschachtelungseigenschaften von $I_n := [a_n, b_n]$. Wenn $a_{n+1} > a_n$ und $b_{n+1} < b_n$, dann gilt $I_{n+1} \subseteq I_n \forall n \in \mathbb{N}$.
$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{n(n-1)}{n^2-1} = \frac{n-1}{n-1/n} > \frac{n-1}{n} = a_n$
$b_{n-1} = \frac{n}{n-1} = \frac{n(n+1)}{n^2-1} = \frac{n+1}{n-1/n} > \frac{n+1}{n} = b_n$
$b_n - a_n = \frac{n+1-n+1}{n} = \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \cdot 0 = 0$
$a_n = \frac{n-1}{n} < 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \frac{n+1}{n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$
Damit

$$\{1\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

und wegen der Einpunktigkeit gilt auch “$=$” an stelle von “$\subset$”.

3. Für die Menge $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit

$$x_n := \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

finde man, beginnend mit $a_1 = 1/2$ und $b_1 = 1$ eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ derart, dass die b_n obere Schranken und die a_n keine oberen Schranken von M sind. Man zeige dazu zunächst für $m > n$:

$$0 < x_m - x_n = \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^n}$$

Anmerkung: Die Zahl $\sup\{x_n + 2 : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n + 2 : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$ wird mit $e := \exp 1$ bezeichnet. Es gilt somit:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{e - 2\}$$

$$0 < x_m - x_n = \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} < \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ mal}}} = \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\sum_{k=n+2}^{m+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 \cdot (1 - \frac{1}{2^{m-n}}) < \frac{1}{2^n}$$

Definiere also $a_n := x_n$ und $b_n := x_n + \frac{1}{2^n}$. Da $x_n < x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ und $x_{n+1} - x_n < \frac{1}{2^n}$, bilden die a_n und b_n auf diese Art eine Intervallschachtelung.

3 Komplexe Zahlen

1. Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ dar.

$$\frac{2+i}{2-i}; \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k, \; k \in \mathbb{Z}; \qquad \sqrt{i}$$

- $\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

- $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^k = i^k$
- $\sqrt{i} = a+bi \Rightarrow \sqrt{i}^2 = i = a^2-b^2+2abi \Rightarrow a^2 = b^2 \wedge 2ab = 1 \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2+3i$ und $z_2 = 1-7i$. Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+bi$ dar.

$$z_1 + z_2; \qquad z_1 - z_2; \qquad z_1 z_2; \qquad \frac{z_1}{z_2}; \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

Ferner berechne man den Betrag jeder der fünf Zahlen.

2.
   - $z_1 + z_2 = 3 - 4i, \quad |z_1 + z_2| = 5$
   - $z_1 - z_2 = 1 + 10i, \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{101}$
   - $z_1 \cdot z_2 = 23 - 11i, \quad |z_1 \cdot z_2| = 5\sqrt{26}$
   - $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{19}{50} + \frac{17}{50}i, \quad |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{\sqrt{26}}{10}$
   - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{19}{50} - \frac{17}{50}i, \quad |\overline{\frac{z_1}{z_2}}| = \frac{\sqrt{26}}{10}$

3. Man löse die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$.

   a) $z^2 = -3 + 4i$

   b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

   c) $4z^2 + 4(1+i)z + 3 - 2i = 0$

   - $a^2 - b^2 + 2abi = -3 + 4i \Rightarrow z_1 = -1 - 2i, \quad z_2 = 1 + 2i$
   - $z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i$
   - $z_{1,2} = \frac{(-4-4i) \pm \sqrt{32i - (48 - 32i)}}{8} = \frac{-4-4i \pm (\pm(4+8i))}{8} \Rightarrow z_1 = \frac{i}{2}, \quad z_2 = -1 - \frac{3}{2}i$

4 Folgen

1. Man bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)n^3 - 2n^2 + 1}{(1-i)n^3 - 1}, \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4 + 12n^2 + 1} - n^2 + 2), \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^6 + 100n^3 + 50} - n^3)$$

   - $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)n^3 - 2n^2 + 1}{(1-i)n^3 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+i) - 2/n + 1/n^3}{(1-i) - 1/n^3} = \frac{1+i}{1-i} = i$

- $\underbrace{\sqrt{n^4+12n^2+1}}_{a} - \underbrace{(n^2-2)}_{b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$
  $= \frac{n^4+12n^2+1-4-n^4+4n^2}{\sqrt{n^4+12n^2+1}-2+n^2} = \frac{16n^2-3}{\sqrt{n^4-12n^2+1}-2+n^2}$
  $= \frac{16-3/n^2}{\sqrt{1+12/n^2+1/n^4}-2/n^2+1} \longrightarrow \frac{16}{\sqrt{1}+1} = 8$
- $\sqrt{n^6+100n^3+50}-n^3 = \frac{n^6+100n^3+50-n^6}{\sqrt{n^6+100n^3+50}+n^3} = \frac{100+50/n^3}{\sqrt{1+100/n^3+50/n^6}+1} \longrightarrow \frac{100}{2} = 50$

2. Für $a, b \geq 0$ berechne man
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$$

Betrachte zunächst $a \neq b$. Sei o.E. $a > b$, sonst benenne sie um.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \sqrt[n]{1+\underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^n}_{<1}} = a$$

Sei nun $a = b$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{2} = a$$

3. Für $a > 0$ und den Startwert $x_0 > 0$ sei die Folge (x_n) durch die Rekursionsformel
$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$
$n = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

   a) Für $a = 2$ und $x_0 = 1$ berechne man x_1, x_2 und x_3.
   b) Man zeige durch vollständige Induktion: $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
   c) Warum gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?
   d) Man zeige, dass die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ monoton fallend ist. Warum konvergiert die Folge (x_n)?
   e) Man finde den Grenzwert der Folge (x_n).

a)

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{17}{12} \qquad x_3 = \frac{577}{408}$$

b) Beweis durch Induktion.
(IA) $x_0 > 0$ nach Voraussetzung ✓

(IS) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_n}_{>0} + \overbrace{\underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0}}^{>0}\right) > 0$ ✓

c) Beweis ebenfalls durch vollständige Induktion.

(IA) $x_1^2 = \frac{1}{4}(x_0 + \frac{a}{x_0})^2 = \frac{1}{4}\left(x_0^2 + \left(\frac{a}{x_0}\right)^2 + 2a\right)$

$= \frac{a}{2} + \frac{a^2+x_0^4}{4x_0^2}$

Zu zeigen ist also $\frac{a^2+x_0^4}{4x_0^2} \geq \frac{a}{2}$

Betrachte dazu $0 \leq (a - x_0^2)^2 = a^2 - 2ax_0^2 + x_0^4 \Rightarrow a^2 + x_0^4 \geq 2ax_0^2 \Rightarrow \frac{a^2+x_0^4}{x_0^2} \geq 2a \Rightarrow \frac{a^2+x_0^4}{4x_0^2} \geq \frac{2}{2}$

(IS) $0 \leq (x_n - \sqrt{a})^2 = x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a \Rightarrow 2\sqrt{a} \leq \frac{x_n^2+a}{x_n} = x_n + \frac{a}{x_n} = 2 \cdot x_{n+1}$
$\Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{a}$

d) Von oben wissen wir, dass $x_n \geq \sqrt{a} \forall n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass $a \leq x_n^2$ und damit $\frac{a}{x_n} \leq x_n \Rightarrow x_n + \frac{a}{x_n} \leq 2x_n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$
Die Folge ist also nach unten beschränkt und monoton fallend. Nach Satz 55 der Vorlesung muss sie damit konvergieren.

e) Da x_n konvergiert, ist sie eine Cauchyfolge und damit gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \ |x_{n+1} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2x_0} \forall n > N$
$|x_{n+1} - x_n| = |\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - x_n| = |\frac{a}{2x_n} - \frac{x_n}{2}| = \left|\frac{a-x_n^2}{2x_n}\right| = \frac{x_n^2-a}{2x_n} \Rightarrow x_n^2 - a < \frac{\varepsilon x_n}{x_0} \leq \frac{\varepsilon x_0}{x_0} = \varepsilon \Rightarrow x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$

4. Für die nachstehenden Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$ finde man – ggf. in $\overline{\mathbb{R}}$ – den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte. Im Fall der Konvergenz oder der uneigentlichen Konvergenz bestimme man den Grenzwert.

a) $a_n := \sqrt{n^3 + n^2 + n} - n$
b) $a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$
c) $a_n := ((-1)^n + 1)\frac{n^2-1}{n+1}$
d) $a_n := \sqrt[n]{3^n + ((-1)^n + 1)5^n}$

	lim inf	lim sup	Häufungspunkte	Grenzwert
(1)	∞	∞	–	∞
(2)	-1	$+1$	± 1	–
(3)	0	∞	0	–
(4)	3	5	$3; 5$	–

a) $a_n := \sqrt{n^3 + n^2 + n} - n = n \cdot (\sqrt{n + 1 + \frac{1}{n}} - 1) \longrightarrow \infty$
Wähle $\forall k \in \mathbb{N}, \ \ N > k: \ a_n > k \forall n > N$

b) $a_{2n} = \frac{2n-1}{2n+1} \longrightarrow 1$
$a_{2n+1} = \frac{-(2n+1)}{2n+1} \longrightarrow -1$

c) $a_{2n} = 4n - 2 \longrightarrow \infty$

$a_{2n+1} = 0 \longrightarrow 0$

d) $a_{2n} = \sqrt[2n]{3^{2n} + 2 \cdot 5^{2n}} = 5 \cdot \sqrt[2n]{\left(\frac{3}{5}\right)^{2n} + 2} \longrightarrow 5$

$a_{2n+1} = \sqrt[2n+1]{3^{2n+1}} = 3$

5. Die Folge (a_n) sei durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := (1+a_n)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ rekursiv definiert. Man bestätige $1/2 \leq a_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, beweise

$$|a_n - a_m| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^m |a_{n-m} - a_0|$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$, zeige die Konvergenz der Folge unter Verwendung des Cauchy-Kriteriums und berechne ihren Grenzwert.

$(a_n),\ a_0 := 1,\ a_{n+1} := (1 + a_n)^{-1} = \frac{1}{1+a_n}$

Behauptung: $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

Induktion: $n = 0$: $\frac{1}{1+1} \geq \frac{1}{2}$ ✓

$\frac{3}{2} \leq a_n + 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+a_n} \leq 1$ ✓

$|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N$

Sei o.B.d.A. $n > m \geq 1$.

$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{1+a_{n-1}} - \frac{1}{1+a_{m-1}} \right| = \frac{|a_{m-1} - a_{n-1}|}{(1+a_{n-1}) \cdot (1+a_{m-1})}$

$= \frac{|a_{n-1} - a_{m-1}|}{\underbrace{(1 + a_n - 1)}_{\geq \frac{3}{2}} \cdot \underbrace{(1 + a_{m-1})}_{\geq \frac{3}{2}}} \leq \frac{4}{9} |a_{n-1} - a_{m-1}|$

$\leq \left(\frac{4}{9}\right)^m \cdot |a_{n-m} - a_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^m \cdot \frac{1}{2}$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{4}{9}\right)^m \cdot \frac{1}{2} < \varepsilon$ für alle $m \geq N$, da $\left(\frac{4}{9}\right)^m \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \forall n, m \geq N$ gilt: $|a_n - a_m| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^m \cdot \frac{1}{2} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Cauchy-Kriterium $\Rightarrow$ Folge konvergiert.

$a = \frac{1}{1+a} \qquad a + a^2 - 1 = 0 \longrightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$