Analysis 1 – Montag – Aufgaben

Maximilian Fischer

18.08.2008

1 Induktion

1. Man zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 := 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2. Man zeige für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) := (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rekursiv definiert durch $a_1 := a$ und

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{1 + a_n^2} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   a) Warum ist diese rekursive Definition sinnvoll?
   b) Man berechne jeweils a_1, a_2, a_3, a_4 für $a = 2, a = 1/2$ und $a = 1$.
   c) Sei $a \geq 0$. Man zeige $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots$.
   d) Wie ist a zu wählen, damit für alle natürlichen Zahlen n die Beziehungen $a_n > 0$ und $a_n > a_{n+1}$ gelten? (Beweis!)
   e) Für welche Wahl von a kann in Nr. 3d "$>$" jeweils durch eine der Relationen "$<$", "$=$" oder "$\leq$" ersetzt werden? Wie lauten die a_n im Fall "$=$"? (Beweise!)
   f) Sei $a > 0$. Warum sind die Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ durch

$$b_n := \frac{1}{a_n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

   sinnvoll definiert? Man stelle eine Rekursionsformel für die b_n mit einem geeigneten "Startwert" $b, b_1 := b$, auf.

2 Reelle Zahlen, Intervalle

1. Schon die Pythagoräer des 5. Jahrhunderts v. Chr. erkannten, dass es auf jeder Strecke Punkte gibt, die diese in keinem ganzzahligen Verhältnis teilen, z.B. die Punkte des goldenen Schnittes. Ein Punkt P teilt eine Einheitsstrecke OE gemäß dem goldenen Schnitt, wenn für die Längen $h = \overline{OP}$ und $1 - h = \overline{PE}$ gilt:

$$1/h = h/(1-h), \quad \text{also} \quad h^2 = 1 - h \qquad (\star).$$

Man zeige mit Hilfe von Satz 24 aus der Vorlesung, dass genau ein $h > 0$ mit der Eigenschaft $(\star)$ existiert. Warum gilt für $g := h^{-1}$

$$g^2 = 1 + g, \qquad g = 1 + h \; ?$$

g heißt *goldener Schnitt*. Man zeige, dass g keine rationale Zahl ist.

2. Warum bilden die Intervalle

$$I_n := \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

eine Intervallschachtelung? Man bestimme

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

3. Für die Menge $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit

$$x_n := \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

finde man, beginnend mit $a_1 = 1/2$ und $b_1 = 1$ eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ derart, dass die b_n obere Schranken und die a_n keine oberen Schranken von M sind. Man zeige dazu zunächst für $m > n$:

$$0 < x_m - x_n = \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^n}$$

Anmerkung: Die Zahl $\sup\{x_n + 2 : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n + 2 : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$ wird mit $e := \exp 1$ bezeichnet. Es gilt somit:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{e - 2\}$$

3 Komplexe Zahlen

1. Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ dar.

$$\frac{2+i}{2-i}; \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k, \ k \in \mathbb{Z}; \qquad \sqrt{i}$$

2. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 1 - 7i$. Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ dar.

$$z_1 + z_2; \qquad z_1 - z_2; \qquad z_1 z_2; \qquad \frac{z_1}{z_2}; \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

   Ferner berechne man den Betrag jeder der fünf Zahlen.

3. Man löse die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$.

   a) $z^2 = -3 + 4i$
   b) $z^2 - 2z + 5 = 0$
   c) $4z^2 + 4(1+i)z + 3 - 2i = 0$

4 Folgen

1. Man bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)n^3 - 2n^2 + 1}{(1-i)n^3 - 1}, \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4 + 12n^2 + 1} - n^2 + 2), \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^6 + 100n^3 + 50} - n^3)$$

2. Für $a, b \geq 0$ berechne man

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

3. Für $a > 0$ und den Startwert $x_0 > 0$ sei die Folge (x_n) durch die Rekursionsformel

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

   $n = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

   a) Für $a = 2$ und $x_0 = 1$ berechne man x_1, x_2 und x_3.
   b) Man zeige durch vollständige Induktion: $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
   c) Warum gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?
   d) Man zeige, dass die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ monoton fallend ist. Warum konvergiert die Folge (x_n)?
   e) Man finde den Grenzwert der Folge (x_n).

4. Für die nachstehenden Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$ finde man – ggf. in $\overline{\mathbb{R}}$ – den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte. Im Fall der Konvergenz oder der uneigentlichen Konvergenz bestimme man den Grenzwert.

   a) $a_n := \sqrt{n^3 + n^2 + n} - n$

   b) $a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$

   c) $a_n := ((-1)^n + 1) \frac{n^2-1}{n+1}$

   d) $a_n := \sqrt[n]{3^n + ((-1)^n + 1)5^n}$

5. Die Folge (a_n) sei durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := (1 + a_n)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ rekursiv definiert. Man bestätige $1/2 \leq a_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, beweise

$$|a_n - a_m| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^m |a_{n-m} - a_0|$$

   für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$, zeige die Konvergenz der Folge unter Verwendung des Cauchy-Kriteriums und berechne ihren Grenzwert.