Ferienkurs Analysis 1 – Reelle und Komplexe Zahlen – Folgen

Maximilian Fischer

18.08.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen

Es gibt, wie aus Schule und Vorlesung bekannt, verschiedene Mengen von Zahlen, von denen die nächste die jeweiles vorherige enthält:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Wir wollen uns im Folgenden hauptsächlich mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ beschäftigen, werden aber auch kurz $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ behandeln.

Bemerkung 1 (Weitere Zahlen) *Natürlich gibt es noch weitere Mengen von Zahlen, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.*

1.1 Natürliche Zahlen

1.1.1 Definition

Intuitiv sind das die Zahlen, mit denen man zählt. Es gibt also eine kleinste, aber keine größte und *jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger* (archimedisches Prinzip). Wir können bei der Eins oder bei der Null mit dem Zählen anfangen, je nachdem, was uns geeigneter erscheint. Wir werden im Folgenden die Null nicht als natürliche Zahl behandeln.

Definition 2 (Peano Axiome) *Eine Möglichkeit, die natürlichen Zahlen zu definieren.*

- $1 \in \mathbb{N}$
- $\forall n : (n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists_1 n' \in \mathbb{N})$
- $\forall n : \neg(n' = 1)$
- $\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m' = n' \Rightarrow m = n$
- $\mathbb{N} = \inf(X : 1 \in X, (\forall n : n \in X \Rightarrow n' \in X))$

Das letzte Axiom heißt dabei Induktionsaxiom, es ermöglicht das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

1.1.2 Vollständige Induktion

Beweisprinzip: Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ sind richtig, wenn

Induktionsanfang $A(1)$ richtig ist, und wenn

Induktionsvoraussetzung für jedes $n \in \mathbb{N}$, wofür die Aussagen $A(1), \cdots, A(n)$ gelten

Induktionsschluss auch $A(n+1)$ richtig ist.

1.1.3 Beispiele zur vollständigen Induktion

Satz 3 (Arithmetische Summenformel) $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis: $A(n)$ ist die Gültigkeit obiger Formel für dieses $n \in \mathbb{N}$.

IA $A(1) \quad 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ ✓

IS $(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1)$
$= (\frac{1}{2} \cdot n + 1) \cdot (n+1) = \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot (n+1)$

Das ist $A(n+1)$. □

Satz 4 (Geometrische Summenformel) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Beweis:

IA $1 + x = \frac{(1+x) \cdot (1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$ ✓

IS $(1 + x + \cdots + x^n) + x^{n+1} \underbrace{=}_{IV} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x}$
$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ □

1.1.4 Bernoulli-Ungleichung

Satz 5 (Bernoulli-Ungleichung) *Für jede Zahl $x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt* $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Beweis:

IA $n = 1 \quad (1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$ ✓

IS $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1 + n \cdot x) \cdot (1+x)$
$= 1 + x + n \cdot x + n \cdot x^2 = 1 + (n+1) \cdot x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1) \cdot x$ □

1.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition 6 (Fakultät) *Die Fakultät $n!$ für $n \in \mathbb{N}$ ist rekursiv definiert durch*

(i) $1! := 1$

(ii) $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$

D.h. $n! \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Satz 7 () *Die Anzahl aller Anordnungen n verschiedener Elemente ist $n!$.*

Beweis: Die Elemente seien $1, 2, \dots, n$. Für $n = 1$ gibt es nur eine Anordnung $\{(1)\}$. Für $n = 2$ gibt es zwei Anordnungen $\{(1,2),(2,1)\}$. Beweis durch vollständige Induktion.

(IA) $n = 1$ ✓

(IS) Nach (IV) $n!$ Anordnungen von $1, 2, 3, \dots, n, n+1$, die die 1 festhalten. Ebensoviele, wo die 1 an die 2. Stelle rückt, usw. Insgesamt also $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ □

Definition 8 (Permutation) *Eine* Permutation *eine Menge M ist eine eineindeutige Zuordnung von M auf sich.*

Bemerkung 9 () *Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.*

Definition 10 (Binomialkoeffizient) *Seien $n, k \in \mathbb{N}$.*
$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ *"n über k bezeichnet die Anzahl der verschiedenen k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge für $k \leq n$. Die Zahlen $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ heißen Binomialkoeffizienten.*

Satz 11 () $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$

Beweis: Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge. Es gibt $n!$ verschiedene Anordnungen der Elemente (7). Die ersten k Elemente einer Anordnung ergeben eine k-elementige Teilmenge. Jede k-elementige Teilmenge kommt dabei $k! \cdot (n-k)!$ oft vor, wegen $k!$ bzw. $(n-k)!$ möglichen Permutationen der ersten k bzw. der letzten $n-k$ Elemente einer Anordnung. □

Satz 12 (Binomische Formel)
Seien a, b Zahlen und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^k \cdot b^{n-k}$

Beweis: Mittels vollständiger Induktion oder $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$. n Faktoren, alle möglichen Produkte a^k kommt $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$-oft vor (10). Gleichzeitig entsteht dabei b^{n-k}. □

1.2 Ganze und Rationale Zahlen

Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erfolgt, indem man die Null und alle negativen Zahlen dazunimmt. Damit erreicht man, dass man immer subtrahieren kann, $\mathbb{Z}$ ist also bezüglich der Subtraktion eine Gruppe. Die Erweiterung auf die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfolgt, indem man alle Brüche $\frac{m}{n} \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ dazunimmt. Auf diese Weise entstehen auch multiplikative Inverse ($x \cdot \frac{1}{x} = 1 \forall x \in \mathbb{Q}$), so dass $\mathbb{Q}$ zu einem Körper wird (siehe unten).

1.3 Reelle Zahlen

Es gibt einige Möglichkeiten, die reellen Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren. Wir werden keine verwenden, sondern uns nur mit den Eigenschaften der reellen Zahlen befassen. Sie sind charakterisiert durch ihre Körperstruktur, die Anordnung und die Vollständigkeit.

Bemerkung 13 (Eigenschaften von $\mathbb{R}$) *Genau genommen, ist das bereits alles, was man über reelle Zahlen sagen kann. Sie sind ein vollständiger, archimedisch geordneter Körper und damit bereits (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.*

1.3.1 Die Körperstruktur

Körperstruktur bedeutet, in $\mathbb{R}$ gelten die Folgenden Gesetze.

Definition 14 (Körperaxiome)

- *(K1) Addition und Multiplikation sind kommutativ:*
  $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
- *(K2) Addition und Multiplikation sind assoziativ:*
  $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *(K3) Gleichungen der Form*
  $a + x = b, \quad a \cdot x = b$ *für* $a \neq 0$
  sind lösbar, d.h. $\exists x \in \mathbb{R}$*, das die Gleichung erfüllt*
- *(K4) Es gilt das Distributivgesetz:*
  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bemerkung 15 (Rationale Zahlen) *Wie leicht zu sehen ist, gelten die obigen Gesetze auch für die rationalen Zahlen, die also auch ein Körper sind.*

1.3.2 Die Anordnung

Salopp gesagt bedeutet Anordnung nichts anderes, als dass man zwei Zahlen vergleichen und anschließend sagen kann, "diese ist größer als jene". Formal ausgeschrieben bedeutet das:

Definition 16 (Anordnungsaxiome)

- *(A1)* $\forall a \in \mathbb{R}$ *gilt genau eine der Relationen:*
  $a > 0; \quad a = 0; \quad -a > 0;$
- *(A2)* $\forall a > 0,\ b > 0$ *gilt:* $a + b > 0, \quad a \cdot b > 0$
- *(A3)* $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : \quad n - a > 0$ *(archimedisches Axiom)*

Weiterhin setzt man:

- Ist $-a$ positiv, dann heißt a negativ
- $a, b \in \mathbb{R} : \ a > b$ "a größer als b", wenn $a - b > 0$
- $b < a$ "b kleiner als a", wenn $a > b$

- $a \leq b$ "a kleiner gleich b", wenn $a < b$ oder $a = b$
- $a \geq 0$ "a nicht negativ"

Alle Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen folgen aus (A1) - (A3) in 16.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eines: $a > b \quad a = b \quad a < b$
- $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$ (Transitivität)
- Sei $a > b > 0$. Dann gilt: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- $a + c > b + c \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall a > b$
- $a > b, \quad c > 0 \Rightarrow ac > bc$
- $a > b, \quad c < 0 \Rightarrow ac < bc$
- Sei $a > b, \quad c > d \Rightarrow a + c > b + d; \quad ac > bd \forall b, d > 0$
- $\forall a \neq 0 \quad a^2 > 0$

Satz 17 (Potenzen)
Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $q > 1 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : q^n > k$

(ii) $0 < q < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : q^n < \varepsilon$

Beweis: (i) $q = 1 + x$ mit $x = q - 1 > 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Bernoulli}} q^m \geq 1 + mx \forall m \in \mathbb{N}$
(A3) in 16 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{k}{x} \quad nx > k \Rightarrow q^n > k$ für jedes k.
(ii) Wende (i) auf $q' := \frac{1}{q}$ mit $k := \frac{1}{\varepsilon}$ an. Danach existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{q}\right)^n = q'^n > k = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon > q^n$ $\square$

Definition 18 (Absolutbetrag) *Sei $a \in \mathbb{R} \Rightarrow |a| := \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$*

Satz 19 ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ **gilt**)

- *(i)* $a \leq |a|$

- *(ii)* $|ab| = |a| \cdot |b|$
- *(iii)* $|a+b| \leq |a| + |b|$ *Dreiecksungleichung*
- *(iv)* $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Beweis: (i) und (ii) sind klar.
Zu (iii): $a + b \leq |a| + |b|$ wegen (i)
$-(a+b) = (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$
Damit $\pm(a+b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$
(iv) $|a| \underbrace{=}_{(iii)} |a - b + b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b| \forall a, b \in \mathbb{R}$
Vertausche a mit $b \Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$
$|b-a| = -(|a| - |b|)$
Damit $\pm(|a| - |b|) \leq |a-b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a-b|$ □

1.3.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Länge l der Diagonale des Einheitsquadrates ist keine rationale Zahl. Denn $l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Angenommen $l \in \mathbb{Q}$, dann $l = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ als gekürzter Bruch, d.h. p, q sind teilerfremd.
$\Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2$ teilt p, d.h. $p = 2p_1$ mit $p_1 \in \mathbb{N}$
$2q^2 = 4p_1^2 \Rightarrow q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow 2$ teilt q.
Also: 2 teilt p und $q \rightarrow$ Widerspruch.
Also $l \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ ist also nicht vollständig. In $\mathbb{R}$ ist die "Unvollständigkeit" beseitigt.

Bemerkung 20 (Hippasus aus Metapontum) *Um 500 v. Chr. entdeckte Hippasus aus Metapontum, ein Schüler von Pythagoras und Mitglied des Geheimbundes der Pythagoräer, dass das Verhältnis von Kantenlänge zu Diagonale am Pentagramm nicht mit ganzen Zahlen darzustellen ist. Er hat somit die erste irrationale Zahl (noch vor Pi) entdeckt. Die Pythagoräer, die ein auf rationale Zahlen gegründetes Weltbild hatten, sollen ihn darauf bei einer Seefahrt über Bord geworfen haben. Hippasos veröffentlichte jedoch zuvor seine Entdeckung. (Wikipedia)*

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ drückt sich durch drei äquivalente Eigenschaften aus:

(I) Jede Intervallschachtelung hat einen nicht leeren Schnitt

(S) Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum

(C) Jede Chauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert

1.3.4 Intervallschachtelung

Bezeichnung: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$ heißt $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ "abgeschlossenes Intervall von a nach b"
$]a;b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ "offenes Intervall von a nach b"
$[a;b[:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ "nach rechts halboffenes Intervall…" (Analog für links halboffen)
Jede dieser Mengen heißt Intervall. Sei I ein solches Intervall. Dann sind a, b die *Randpunkte* von I, und $|I| := b - a$ die *Länge* von I.

Definition 21 (Intervallschachtelung) *Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, \ldots$ kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen I_n mit 2 Eigenschaften.*

(I1)$I_{n+1} \subseteq I_n \forall n \in \mathbb{N}$

(I2)$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ *mit* $|I_n| < \varepsilon$

Auf Deutsch: Alle Intervalle liegen ineinander und ihre Längen werden beliebig klein.
$\mathbb{R}$ ist vollständig weil das Intervallschachtelungsprinzip gilt, d.h. wenn $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, dann ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n := \{x \in \mathbb{R} : x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$$

Satz 22 (Eindeutigkeit) *$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ist einpunktig, d.h. es liegt nur* eine *reelle Zahl in allen Intervallen, d.h.$\exists s \in \mathbb{R}$ mit $\{s\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.*

Beweis: Seien $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow a, b \in I_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |I_n| \geq |a - b| \forall n \in \mathbb{N}$
Angenommen $a \neq b$, dann ist |a-b|>0.
$\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot |a - b| > 0$ Nach (I2) in 21 $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$ Widerspruch $\square$

Definition 23 (Dezimalbruch) *Ein Dezimalbruch ist eine Folge von Zahlen aus $\{0; \ldots; 9\}$ und ein Vorzeichen $\eta \in \{+; -\}$, wie folgt indiziert*

$$\eta d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \ldots$$

wobei $m \in \mathbb{N}_0$ und $d_m > 0$ falls $m > 0$. Er stellt eine reelle Zahl mittels folgender Intervallschachtelung dar. Für $\eta = +$ sei $I_n := [a_n; b_n]$ mit $a_n := \sum_{i=0}^{n} d_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot 10^{-j}$ und $b_n = a_n + 10^{-n}$.

Zu zeigen: (I_n) ist eine Intervallschachtelung. $|I_n| = 10^{-n} \Rightarrow$ (I2) nach 17 (ii) erfüllt.
$a_n \leq a_{n+1}$ $\quad b_{n+1} \leq b_n$ $\quad b_{n+1} = a_{n+1} + 10^{-n-1}$
$= a_n + \underbrace{d_{-(n+1)}}_{\leq 9} \cdot 10^{-(n+1)} + 10^{-(n+1)} \leq a_n + 10^{-n} = b_n \Rightarrow$(I1).

Für $\eta = -$ entsprechend. $\square$

Satz 24 (Wurzeln)
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \forall k \in \mathbb{N} \exists_1 y \in \mathbb{R}_+$ mit $y^k = x$
Bezeichnung: $y = \sqrt[k]{x}$

Beweis: *Eindeutigkeit* klar, weil $0 < y_1 < y_2 \Rightarrow y_1^k < y_2^k$
Existenz: Es genügt $x < 1$ zu betrachten. Den Fall $x > 1$ erhält man durch Übergang zu $x' := \frac{1}{x}$. Definiere Dezimalbruch rekursiv. Seien $d_0 := 0$ und $d_{-1}, \dots, d_{-n}$ bereits so definiert, dass

(i) $(0, d_{-1} \dots d_{-n})^k \leq x$

(ii) $(0, d_{-1} \dots d_{-n} + 10^{-n})^k > x$

Dann sei $d_{-(n+1)} \in \{0; \dots; 9\}$ maximal so, dass $(0; d_{-1} \dots d_{-(n+1)})^k \leq x$. Damit gilt bereits (i). Ist $d_{-(n+1)} < 9$, dann gilt auch (ii). Sei nun $d_{-(n+1)} = 9$. Angenommen, (ii) gilt nicht, d.h.
$x \geq (0, d_{-1} \dots d_{-n} 9 + 10^{-(n+1)})^k = (0, d_{-1} \dots d_{-n} + 10^{-n})^k \leq x$ Widerspruch
Sei $y \in \mathbb{R}$ dargestellt durch obigen Dezimalbruch, nach 23: $([a_n; b_n])$ zugehörige Intervallschachtelung. Dann $x \in [a_n^k; b_n^k]$ wegen (i),(ii). Da $y \in [a_n; b_n]$ gilt auch $y^k \in [a_n^k; b_n^k]$. Es folgt $x = y^k$, weil $([a_n^k; b_n^k])_{n \in \mathbb{N}}$ Intervallschachtelung ist. (I1) in 21 klar. Zu (I2) beachte $b^k - a^k = (b-a) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot b^{k-1-i} \right)^{(*)}$ vergleiche geometrische Summenformel (4). Daher $b_n^k - a_n^k \leq (b_n - a_n) \cdot k$, weil $a_n < b_n \leq 1$.
$b_n - a_n = 10^{-n}$ Zu $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} 10^{-n} < \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow b_n^k - a_n^k < \varepsilon$ $\square$
$(*) b^k - a^k = \frac{\left(1 - \frac{a}{b}\right) \cdot \left(b^k - a^k\right)}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{b^k - a^k - ab^{k-1} + a^{k+1} b^{-1}}{1 - \frac{a}{b}} = (b^k - ab^{k-1}) \cdot \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^k}{1 - \frac{a}{b}} \underbrace{=}_{4} (b-a) b^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b}\right)^i = (b-a) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i} \right)$

1.3.5 Supremumseigenschaft

Definition 25 (untere Schranke) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. $s \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von M, wenn $x \geq s \forall x \in M$ gilt. (Obere Schranke analog)*

Definition 26 (Infimum) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. $s \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M, wenn gilt:*

(i) *s ist untere Schranke von M.*

(ii) *Jedes $s' > s$ ist* keine *untere Schranke von M.*

Bezeichnung: $\inf M = s$ *(Supremum analog)*

Definition 27 (Beschränktheit)
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach unten (oben) beschränkt, genau dann wenn eine untere (obere) Schranke existiert. Eine Menge heißt beschränkt, genau dann wenn sie nach unten beschränkt und nach oben beschränkt ist.

Satz 28 (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$)
Jede nach oben beschränkte nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Beweis[1]: Wir betrachten den Fall einer nach oben beschränkten Menge. Das erforderliche Supremum konstruieren wir durch eine Intervallschachtelung $([a_n; b_n])$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Alle b_n sind obere Schranken für M.

2. Alle a_n sind keine oberen Schranken für M.

Die Intervallschachtelung konstruieren wir rekursiv. Wir beginnen mit irgendeiner oberen Schranke b_1 und irgendeinem a_1, das keine obere Schranke ist (z.B: $a_1 := \alpha - 1$ wobei $\alpha \in M$). Es sei $[a_n; b_n]$ konstruiert. Durch Halbierung erzeugen wir das nächste Intervall: Ist m der Mittelpunkt von $[a_n; b_n]$, so setzen wir

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n; m], & \text{falls } m \text{ obere Schranke für } M \text{ ist,} \\ [m; b_n], & \text{falls } m \text{ keine obere Schranke ist.} \end{cases}$$

Sei s die allen $[a_n; b_n]$ angehörende Zahl. s ist eine obere Schranke für M. Sonst gäbe es ein Element $x \in M$ mit $x > s$ und dazu ein Intervall $[a_n; b_n]$ mit $b_n - a_n < x - s$. Wegen $s \in [a_n; b_n]$ folgte $b_n - s < x - s$, also $b_n < x$ im Widerspruch zur Eigenschaft 1. Ferner ist s die kleinste obere Schranke. Wäre auch $s' < s$ eine obere Schranke, so gäbe es ein Intervall $[a_n; b_n]$ mit einer Länge $< s - s'$. Wegen $s \in [a_n; b_n]$ folgte $s - a_n < s - s'$, also $a_n > s'$. Damit wäre dieses a_n eine obere Schranke im Widerspruch zu 2. Also ist s ein Supremum für M. $\square$

[1] Aus [1]

Bemerkung 29 (Intervallschachtelung) *Mit diesem Beweis folgt die Supremumseigenschaft aus dem Intervallschachtelungsprinzip. Die umgekehrte Richtung kann auch gezeigt werden. Ist nämlich ($[a_n; b_n]$) eine Intervallschachtelung, so ist die Menge $A := \{a_1, a_2, \ldots\}$ nach oben beschränkt. Obere Schranken sind alle b_n, und für die kleinste obere Schranke s gilt $a_n \leq s \leq b_n \in \mathbb{N}$. Also ist $s = \sup A$ eine Zahl, die allen $[a_n; b_n]$ angehört.* $\square$

Satz 30 (Dichtheit) *$\mathbb{Q}$ liegt* dicht *in $\mathbb{R}$, d.h. für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.*

Beweis: Archimedes: $\exists q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{b-a} < q \Rightarrow \frac{1}{q} < b - a$
Sei $p \in \mathbb{Z}$ minimal mit $p > q \cdot a \Rightarrow a < \frac{p}{q} = \frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} < a + (b - a) = b$
$\Rightarrow \frac{p}{q} \in]a; b[$ $\square$
Die Eigenschaft (C) (Konvergenz von Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$) behandeln wir später, wenn wir wissen, was Folgen sind.

1.3.6 Abzählbarkeit

Definition 31 (Abbildungen) *Seien A, B Mengen und $f : \quad A \to B$ eine Abbildung, d.h. jedem $a \in A$ ist $f(a) \in B$ zugeordnet.*

- *f heißt* konstant, *wenn ein $b_0 \in B$ existiert mit $f(a) = b_0 \forall a \in A$*
- *f heißt* injektiv, *wenn $\forall a, a' \in A$ gilt: "$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$"*
- *f heißt* surjektiv, *wenn $\forall b \in B \exists a \in A : \quad b = f(a)$*
- *f heißt* bijektiv, *genau dann wenn f injektiv und surjektiv ist. Mit anderen Worten, jedem Element von B entspricht genau ein Element von A.*

Definition 32 (Mächtigkeiten)
Seien A, B Mengen.

- *A, B heißen gleichmächtig, genau dann wenn $\exists f : \quad A \to B$ bijektiv.*
- *B hat größere Mächtigkeit als A, wenn A gleichmächtig zu einer Teilmenge von B, aber nicht umgekehrt.*
- *A heißt abzählbar unendlich, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.*

- *A heißt (höchstens) abzählbar, wenn A entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.*

Definition 33 (Folge)
Eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in eine Menge A wird oftmals mit $n \mapsto a_n$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_n = (a_n)$ bezeichnet. (a_n) heißt auch Folge *in A.*

Satz 34 ()
Jede Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Beweis: Sei A nicht endlich. Rekursive Definition einer Bijektion. $\mathbb{N} \to A, \quad n \mapsto a_n$
$a_1 := \min A$; sind $a_1, \dots, a_n \in A$ definiert: $a_{n+1} := \min \underbrace{A\backslash\{a_1, \dots, a_n\}}_{\neq\emptyset}$
Injektivität ist klar. Surjektiv, weil $\{b \in A : \quad b \leq a\}$ endlich für jedes $a \in A$.

Definition 35 (Kartesisches Produkt) *Seien A, B Mengen. Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$.*

Satz 36 (Abzählbarkeit des kartesischen Produkts) *Seien A, B abzählbare Mengen. Dann ist auch $A \times B$ abzählbar.*

Beweis: Ein Beweis wird hier nicht gegeben, da ich keinen gefunden habe, der mir schön genug erschien. Wer möchte, kann einen z.B. in [1] nachlesen.

Bemerkung 37 (Abzählbare Mengen) *Damit sind besonders $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen abzählbar.*

Satz 38 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)
$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (überabzählbar).

Beweis: Angenommen, $\exists \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$, bijektiv. Wir definieren rekursiv eine Intervallschachtelung (I_n) mit
$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \notin I_n$
$I_1 = [x_1 + 1; x_1 + 2]$. Seien nun I_n definiert. $I_{n+1} \subset I_n$ wird so definiert, dass I_n in drei gleich große Teile zerlegt wird und das (es existieren ein oder zwei) Teilintervall genommen wird, in dem x_{n+1} nicht enthalten ist. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert nun $\{s\} = \bigcap_n I_n$ mit $s \in \mathbb{R}$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = s$. Per Konstruktion liegt x_k nicht in I_k und kann damit nicht s sein. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 39 (Korollar) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *Die Menge der irrationalen Zahlen ist überabzählbar, denn sonst wäre* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ *abzählbar.*

1.4 Komplexe Zahlen

Definition 40 (Komplexe Zahlen)
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x; y) x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ *mit zwei Verknüpfungen* ($\mathbb{C}$ *ist also mehr als nur* $\mathbb{R}^2$*): Für* $z = (x; y)$ *und* $w = (u; v)$ *aus* $\mathbb{C}$ *seien*

- $z + w = (x; y) + (u; v) := (x + u; y + v)$
- $z \cdot w = (x; y) \cdot (u; v) := (x \cdot u - y \cdot v; x \cdot v + y \cdot u)$

Satz 41 (Körpereigenschaften)
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper, d.h. (K1)-(K4) aus Definition 14 gelten.*

Beweis: Verifiziere z.B. $z + (0; 0) = z \forall z \in \mathbb{C}$
$z \cdot (1; 0) = z$
$\mathbf{0} := (0; 0) \quad \mathbf{1} := (1; 0)$ neutrale Elemente in $\mathbb{C}$.
$-z = (-x; -y)$ und für $z \neq \mathbf{0}: \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}; -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$
$(0; 1), \quad (0; -1)$ sind Lösungen von $z^2 = -\mathbf{1}$. $\square$

Definition 42 (Schreibweise und Bezeichnungen)

- $z = (x; y) =: x + i \cdot y$
- i *ist die imaginäre Einheit* $0 + 1 \cdot i$
- $x := \Re z$ *ist der Realteil von* z

- $y := \Im z$ *ist der Imaginärteil von* z
- $\boldsymbol{1} = 1 + i \cdot 0 = 1 \qquad \boldsymbol{0} = 0 + i \cdot 0 = 0$

Addition: $z = x + iy, w = u + iv, \qquad z + w = x + iy + u + iv = (x + u) + i \cdot (y + v)$
Multiplikation: $z \cdot w = (x+iy) \cdot (u+iv) = xu + iyu + xiv + iyiv = xu + i(yu + xv) + i^2 yv = (xu - yv) + i(yu + xv)$
Betrag: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re^2(z) + \Im^2(z)}$
Komplex konjugierte Zahl von z: $\overline{z} := x - iy = \Re z - i\Im z$

1.4.1 Rechenregeln zur Konjugation

- $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- z reell $\Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

1.4.2 Rechnen mit dem Betrag

- $|z| > 0 \Leftrightarrow z \neq 0$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|\Re(z)| \leq |z|, |\Im(z)| \leq |z|$
- $|\Re(z)| = |z| \Leftrightarrow z$ reell
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung

2 Folgen

Definition 43 (Konvergenz) *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)$ heißt konvergent, wenn $a \in \mathbb{C}$ existiert, derart, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n > N$. a heißt Grenzwert oder Limes von (a_n).*
Bezeichung: $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ oder $a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$.

Die Folge konvergiert gegen a.
Ist $a = 0$, dann heißt (a_n) Nullfolge.
Ist eine Folge nicht konvergent, dann heißt sie divergent.

Satz 44 (Eindeutigkeit) *Der Grenzwert ist eindeutig.*

Beweis: Sei $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a'$ und $a \neq a'$
$\Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|a-a'| > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \forall n > N$
$\exists N' \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a'| < \varepsilon \forall n > N'$
Wähle $n > \max\{N, N'\}$. Dann gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ *und* $|a_n - a'| < \varepsilon$.
$|a-a'| = |a - a_n + a_n - a'| \underbrace{\leq}_{Dreiecksungleichung} |a-a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = |a-a'|$
Widerspruch. $\square$

Definition 45 (ε-Umgebung)
$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < \varepsilon\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ε.
$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n > N$.
$U \in \mathbb{C}$ ist eine Umgebung von a, wenn U eine ε-Umgebung von a umfasst, d.h. $\exists \varepsilon > 0: \quad U_\varepsilon(a) \subset U$.

Satz 46 (Grenzwerte einiger Folgen)

1 $0 < s \in \mathbb{Q}: \frac{1}{n^s} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2 $a \in \mathbb{R}^+: \sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

3 $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

4 $z \in \mathbb{C}, |z| < 1: z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

5 $z \in \mathbb{C}, |z| > 1, k \in \mathbb{N}: \frac{n^k}{z^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Beweis:
1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}, N \geq \varepsilon^{-\frac{1}{s}}$. Dann $\forall n > N: \left|\frac{1}{n^s} - 0\right| = \frac{1}{n^s} < \frac{1}{N^s} \leq \varepsilon$
2. Zunächst $a \geq 1$. $a_n := \sqrt[n]{a} - 1 \overset{5}{\Longrightarrow} a = (1+a_n)^n \geq 1 + n \cdot a_n \geq n \cdot a_n$
$\Rightarrow a_n \leq \frac{a}{n}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}, N \geq \frac{a}{\varepsilon}$. Dann gilt $\forall n > N: |\sqrt[n]{a} - 1| = a_n \leq \frac{a}{n} < \frac{a}{N} \leq \varepsilon$.

Jetzt $a < 1$. $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (siehe Rechenregel 47(3))

3. $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ weil $\sqrt[n]{1} = 1 \geq 1$.

Sei $n \geq 2$: $n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 \Rightarrow n - 1 \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot a_n^2$

$\Rightarrow 2 \geq n \cdot a_n^2 \Rightarrow a_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n}}$, $n \geq 2$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}, N \geq \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dann $\forall n > N$: $|\sqrt[n]{n} - 1| = a_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n}} < \sqrt{\frac{2}{N}} \leq \varepsilon$

4. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. 17(ii)$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|z|^N < \varepsilon \Rightarrow \forall n > N$:

$|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n = |z|^N \cdot \underbrace{|z|^{n-N}}_{<1} < |z|^N < \varepsilon$

5. $\left|\frac{n^k}{z^n} - 0\right| = \frac{n^k}{|z|^n} = \left(\frac{n}{q^n}\right)^k$ mit $q := |z|^{\frac{1}{k}} > 1$ weil $|z| > 1$

$a := q - 1 > 0 \Rightarrow q^n = (1+a)^n \underbrace{\geq}_{\text{Binomische Formel}} \frac{1}{2} n \cdot (n-1) a^2$

$\Rightarrow \left(\frac{n}{q^n}\right)^k \leq \left(\frac{2}{(n-1)a^2}\right)^k$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\mathbb{N} \ni N \geq 1 + \frac{2}{a^2}\varepsilon^{-\frac{1}{k}}$. Dann

$\forall n > N: \quad \left(\frac{n}{q^n}\right)^k \leq \left(\frac{2}{(n-1)a^2}\right)^k < \left(\frac{2}{(N-1)a^2}\right) \leq \left(\frac{2}{\frac{2}{a^2}\varepsilon^{-\frac{1}{k}} a^2}\right)^k = \varepsilon$ $\square$

Satz 47 (Rechenregeln für Folgen) *Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gelten folgende Regeln.*

1 $a_n + b_n \to a + b$

2 $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

3 *Sei $b \neq 0$; dann $b_n \neq 0$ bis auf endlich viele n, und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$*

4 $|a_n| \to |a|, \overline{a_n} \to \overline{a}, \Re a_n \to \Re a, \Im a_n \to \Im a$

5 *Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n \leq b_n$ bis auf endlich viele n; dann $a \leq b$*

Beweis:

1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N$

$\exists M \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > M$

$\Rightarrow \forall n > \max\{N, M\} : \quad |(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \underbrace{\leq}_{\text{Dreiecksungleichung}} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow a + b$
2. $a_nb_n - ab = a_nb_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b) = (a_n - a) \cdot (b_n - b + b) + a \cdot (b_n - b) = (a_n - a) \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot |b| + |a| \cdot (b_n - b)$.
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\frac{\varepsilon}{3}}{1+|b|} \forall n > N$
$\exists M \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \min\{1, \frac{\frac{\varepsilon}{3}}{1+|a|}\} \forall n > M$
Dann gilt $\forall n > \max\{N, M\}$:
$|a_nb_n - ab| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
3. Zu $\varepsilon := \frac{1}{2}|b| > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit
$|b_n - b| < \varepsilon \forall n > \mathbb{N}$ und $|b| - |b_n| \leq ||b| - |b_n|| \leq |b - b_n| < \frac{1}{2}|b| \Rightarrow |b_n| > \frac{1}{2}|b|$
Insbesondere $b_n \neq 0 \forall n > N$
$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b - b_n| \forall n > N$
$= \frac{2}{|b|^2}(b - b_n)$ Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben: $\exists M \in \mathbb{N} : |b - b_n| < \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon \forall n > M$
$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \underbrace{\frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2}}_{=\varepsilon} \varepsilon \forall n > \max\{N, M\}$
Wende **2** auf Folgen $(a_n), \left(\frac{1}{b_n}\right)$ an
$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$
4.

- $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$
  Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \forall n > N$
  $\Rightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon \forall n > N$
- $|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$
  Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$
  $\Rightarrow |\overline{a_n} - \overline{a}| < \varepsilon \forall n > N$
- $|\Re(a_n) - \Re(a)| = |\Re(a_n - a)| \leq |a_n - a|$ jetzt wie oben. Entsprechend für $\Im(a_n)$.

5. Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \to a, b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ bis auf endlich viele n.
Angenommen, $a > b$. Zu $\varepsilon := \frac{1}{2}(a - b) > 0 \forall n > N \quad a - a_n \leq |a - a_n|, \quad +b_n - b \leq |b_n - b|$
$\Rightarrow a - a_n < \frac{1}{2}(a - b) \quad b_n - b < \frac{1}{2}(a - b)$
$\Rightarrow a_n > \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b > b_n \forall n > N$ Widerspruch □

Bemerkung 48 (Zu den Rechenregeln) *Nach **5** bleibt "$\leq$" beim Grenzübergang erhalten. Nicht so für "$<$", z.B. $a_n := 0, b_n := \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n < b_n$ aber $\lim a_n = \lim b_n$*

Bemerkung 49 (Komplexe Folgen) $(a_n) \in \mathbb{C}$ *konvergiert* $\Leftrightarrow (\Im a_n)$ und $(\Re a_n)$ *konvergent. Denn "$\Rightarrow$" nach 4 und "$\Leftarrow$" nach **1**.*

Satz 50 (Einschließungsregel) *Es sei* $A_n \leq c_n \leq B_n \forall n$ *(bis auf endlich viele) und es existiere und sei* $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n \Rightarrow (c_n)$ *konvergiert mit* $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Beweis: Wie 47(5).

Definition 51 (Asymptotisch Gleich) (a_n) *und* (b_n) *heißen* asymptotisch gleich, *wenn* $b_n \neq 0$ *bis auf endlich viele Indizes und* $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. *Man schreibt* $a_n \simeq b_n$ *für* $n \to \infty$.

Definition 52 (Beschränktheit)

- $A \subset \mathbb{C}$ *heißt beschränkt, wenn* $c \in \mathbb{R}^+$ *existiert mit* $|a| \leq c \forall a \in A$.
- (a_n) *beschränkt* $:\Leftrightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt, d.h.* $\exists c \in \mathbb{R}^+ : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *nach oben (unten) beschränkt* $:\Leftrightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *nach oben (unten) beschränkt, d.h.* $\exists c \in \mathbb{R} : \quad a_n \leq c \quad (a_n \geq c) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 53 (Lemma)

(i) (a_n) *konvergent* $\Rightarrow (a_n)$ *beschränkt*

(ii) (a_n) *Nullfolge,* (b_n) *beschränkt* $\Rightarrow (a_n b_n)$ *Nullfolge*

Beweis:
(i) Sei $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \forall n > N$
$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq c := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_N|, 1 + |a|\}$ weil $|a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < 1 + |a|$
(ii) $\exists c \in \mathbb{R}^+$ mit $|b_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{c} \forall n \geq N$
$\Rightarrow |a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon \forall n > N$
D.h. $(a_n b_n)$ Nullfolge. $\square$

Definition 54 (Monotonie) $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *heißt monoton wachsend (fallend), genau dann wenn* $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 55 () *$(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und monoton $\Rightarrow$ (a_n) konvergent mit*
$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *falls a_n wachsend*
$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *falls a_n fallend.*

Beweis: Sei (a_n) wachsend, $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $s - \varepsilon < a_N$ (siehe Definition des Supremums).
$\Rightarrow \forall n > N: \quad s - \varepsilon < a_N \underbrace{\leq}_{\text{Monotonie}} a_n \leq s$
Also $|a_n - s| < \varepsilon$, d.h. $a_n \to s$.
(a_n) fallend $\Rightarrow$ $(-a_n)$ wachsend $\Rightarrow$ $-a_n \overset{\text{wiegezeigt}}{\longrightarrow} \sup\{-a_n\} = -\inf\{a_n\}$ $\square$

Definition 56 (Teilfolge) *Sei X eine Menge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, kurz $(a_n) \subset X$. Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine* Teilfolge *von (a_n). Man schreibt kurz $(a_{n_k}) \subset (a_n)$.*

Bemerkung 57 (Zu Teilfolgen)

- *Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst: Setze $n_k := k$.*
- *$(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ streng monoton wachsend $\Rightarrow k \leq n_k \forall k$. Beweis mit Induktion über k.*
  $k = 1 \quad 1 \leq n_1$ *klar*
  $k \to k+1: \quad k \leq n_k \Rightarrow k + 1 \leq n_k + 1 \leq n_{k+1}$ $\square$
- *Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Satz 58 (Konvergenz von Teilfolgen) *Sei (a_n) konvergent, $(a_{n_k}) \subset (a_n) \Rightarrow (a_{n_k})$ konvergiert und $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.*

Beweis: $a := \lim a_n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \forall n > N, n_N \geq N$ nach Bemerkung 57 $\Rightarrow n_k > N \forall k > N \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon \forall k > N$ $\square$

Satz 59 () *$(a_n)_n \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Beweis: $M := \{n \in \mathbb{N} : a_k \leq a_n \forall k \geq n\}$ = Menge all derjenigen Indizes, ab wo die Folge keine größeren Werte mehr annimmt.
1. Fall M endlich. Sei $m := \max M$ bzw. $m := 0$ falls $M = \emptyset$. Induktive Definition von (n_k).
$n_1 := m + 1$. Seien $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ für $k \geq 1$ bereits definiert. $\exists l \in \mathbb{N}, l > n_k$ mit $a_{n_k} < a_l$ weil $n_k \notin M$. Setze $n_{k+1} := l$. Offensichtlich $(a_n)_k$ streng monoton wachsend.
2. Fall M unendlich. Induktive Definition von (n_k). Wähle $n_1 := \min M \in M$. Seien $n_1 < \cdots < n_k$ in M definiert. $\exists l \in M$ mit $l > n_k$, weil M unendlich. Setze $n_{k+1} := l$. Nach Definition von M folgt $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$, also (a_{n_k}) monoton fallend. □

Satz 60 (Bolzano-Weierstraß) *Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine konvergente (monotone) Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).*

Beweis: $\exists (a_{n_k})$ monoton nach 59. (a_{n_k}) beschränkt, weil (a_n) beschränkt (klar). $\overset{55}{\Rightarrow}$ konvergent. □

Satz 61 (Korollar) *$(a_n) \subset \mathbb{C}$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n)$.*

Beweis: $(\alpha_n) := (\Re a_n), (\beta_n) := (\Im a_n)$ beschränkte Folgen, weil (a_n) beschränkt.
$\Rightarrow \exists (\alpha_{n_k}) \subset (\alpha_n)$ konvergent nach 60. (β_{n_k}) ist beschränkt, da (β_n) beschränkt $\Rightarrow \exists (\beta_{n_{k_l}})_l \subset (\beta_{n_k})$ konvergente Teilfolge von (β_{n_k}).
Setze: $c_l := \alpha_{n_{k_l}} + i \cdot \beta_{n_{k_l}} = a_{n_{k_l}}$
(c_l) Teilfolge von $(a_n) \overset{58}{\Rightarrow} (c_l)$ konvergente Teilfolge von (a_n). □

Definition 62 (Häufungspunkt) $(a_n) \subset \mathbb{C}, h \in \mathbb{C}$. *$h$ heißt* Häufungspunkt *von (a_n), wenn jede ε-Umgebung von h, d.h. $U_\varepsilon(h) := \{z \in \mathbb{C} : |z - h| < \varepsilon\}$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält, d.h. wenn gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - h| < \varepsilon\}$ unendlich.*

Satz 63 () *Seien $(a_n) \subset \mathbb{C}, h \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *h ist Häufungspunkt von (a_n).*

(ii) *$\exists (a_{n_k}) \subset (a_n)$ konvergent mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = h$*

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Induktive Definition von (a_{n_k}).
$k = 1$: $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in U_1(h)$

Seien $n_1, \dots, n_k$ bereits definiert ($n_1 < n_2 < \dots < n_k$).
$\exists l \in \mathbb{N}$ mit $l > n_k$ und $a_l \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)$, weil es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)$.
Setze $n_{k+1} := l$.
Zu zeigen: $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $K \in \mathbb{N}$, $K \geq \frac{1}{\varepsilon}$. $\forall k > K$ gilt: $\frac{1}{k} < \frac{1}{K} \leq \varepsilon$ und
$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(h) \subset U_\varepsilon(h)$,d.h. $|a_{n_k} - h| < \varepsilon$.
(ii)⇒(i). Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - h| < \varepsilon \forall k > K$, d.h. $a_{n_k} \in U_\varepsilon(h) \forall k > K$; das sind unendlich viele Indizes. $\square$

Satz 64 (Korollar) *$(a_n) \subset \mathbb{C}$ beschränkt.$\overset{61}{\Rightarrow}$ (a_n) besitzt einen Häufungspunkt.*

Definition 65 (Limes inferior und Limes superior) *Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt.*
$h_* := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ *heißt* Limes inferior *und*
$h^* := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ *heißt* Limes superior *von (a_n).*

Satz 66 () *h_*, h^* sind wohldefiniert und h_* der kleinste, h^* der größte Häufungspunkt einer beschränkten Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis: $c_k := \inf\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, weil (a_n) beschränkt.$\forall k :\quad c_k \leq c_{k+1} \leq a_{k+1} \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (klar)$\overset{(c_k)\text{monotonwachsend,beschränkt}}{\longrightarrow}$ $h_* = \lim_{k\to\infty} c_k$ existiert, d.h. h_* wohldefiniert.
Zeige h_* ist Häufungspunkt: $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} < c_1 + 1 \Rightarrow a_{n_1} < c_{n_1} + 1$ weil $1 \leq n_1$.
Seien $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ bereits definiert mit $a_{n_k} < c_{n_k} + \frac{1}{k}$.
$\exists l \in \mathbb{N}, l > n_k$ mit $a_l < c_{n_k+1} + \frac{1}{k+1}$
$\Rightarrow a_l < c_l + \frac{1}{k+1}$. Setze $n_{k+1} := l$.
Damit $h_* \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} c_{n_k} \quad \underbrace{\leq}_{\text{Definitionvon}(c_l)_{l\in\mathbb{N}}} \quad a_{n_k} < c_{n_k} + \frac{1}{k} \Rightarrow a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h_*$
Zeige h_* ist kleinster Häufungspunkt. Sei h Häufungspunkt $\Rightarrow \exists (a_{n_k}) \subset (a_n)$ mit $(a_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h \quad h_* \leftarrow c_{n_k} \leq a_{n_k} \to h \Rightarrow h_* \leq h$
Zu h^*. Behauptungen folgen aus $h^* = -\lim_{n\to\infty} \inf(-a_n)$ $\square$

2.1 Cauchy-Folgen

Definition 67 (Cauchyfolge) *$(a_n) \subset \mathbb{C}$ heißt Cauchyfolge (CF), wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n, m > N$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Satz 68 () *Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Dann gilt: (a_n) konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge.*

Beweis: "$\Rightarrow$" $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
$\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N$.
$\forall n, m > N: \quad |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
"$\Leftarrow$" Zeige zunächst: (a_n) beschränkt.
Zu $\varepsilon = 1 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1 \forall n, m > N$. Sei $n_0 > N$.
$\forall m > N: \quad |a_m| = |a_m - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_m - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}|$
$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_{n_0}|\}$
Nach Bolzano-Weierstraß 60: $\exists (a_{n_k}) \subset (a_n), (a_{n_k})$ konvergent.
Sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Zeige $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\exists K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall k > K$
Außerdem $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n, m > N$.
Dann gilt $\forall k > \max\{N, K\}$:
$$|a_k - a| \leq \underbrace{|a_k - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{weil} k>N \text{und} n_k \geq k > N} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{weil} k>K} < \varepsilon$$ $\square$

Bemerkung 69 () *Insbesondere: $\mathbb{R}$ besitzt die Eigenschaft (C). Setze für $\mathbb{R}$ statt dem Intervallschachtelungsprinzip (I) die Eigenschaft (C) voraus. Zeige (C)$\Rightarrow$(I). Damit angekündigte Äquivalenz von (I),(S) und (C) gezeigt. Jede dieser drei Eigenschaften ist eine gleichwertige Formulierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.*

2.2 Uneigentliche Konvergenz

Führe die ideellen Elemente $-\infty \neq \infty$ ein und definiere $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit der Festsetzung $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$.
$\forall a \in \mathbb{R}: \quad [a; \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
$[a; \infty] := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \cup \{\infty\} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geq a\}$
Entsprechend $]a, \infty[,]a, \infty]$ und $]-\infty, a], \ldots$

Definition 70 (Supremum unbeschränkter Mengen) *Für $M \subset \mathbb{R}$ sei $\sup M := \infty$, falls M nach oben unbeschränkt. Analog $\inf M := -\infty$, falls M nach unten unbeschränkt.*

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergiert gegen ∞ $(-\infty)$, wenn: $\forall c \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n > c \forall n > N$ $(a_n < c \forall n > N)$.
Man schreibt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(-\infty)$ und sagt: (a_n) *konvergiert in* $\overline{\mathbb{R}}$ oder *konvergiert uneigentlich* oder *divergiert bestimmt* gegen ∞ $(-\infty)$.

3 Literatur

1 Königsberger, *Analysis 1*, 6. Auflage, Springer, 2004

2 Castrigiano, *Analysis 1*, Technische Universität München, 2005

3 Wikipedia