Ferienkurs zur Quantenmechanik 1

T. Heidsieck Blatt 4 WiSe 07/08

C. Paleani

$\boxed{1}$: Wasserstoffatom

Wir beschäftigen uns in dieser Aufgabe mit den Erwartungswerten im Wasserstoffatom, dessen Energieeigenzustände folgendermaßen gegeben sind:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \left[\alpha^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{-\alpha r}{2}} (\alpha r)^l L^{2l+1}_{n-l-1}(\alpha r) \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) \tag{1}$$

wobei $\alpha = 2/na_b$ und die Laguerre Polynome $L^k_n(x)$ folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\int_0^\infty dx\ \mathrm{e}^{-x} x^k L^k_n(x) L^k_m(x) = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn} \tag{2}$$

$$x\ L^k_n(x) = (2n+k+1)L^k_n(x) - (n+k)L^k_{n-1}(x) - (n+1)L^k_{n+1}(x) \qquad \text{sowie} \tag{3}$$

$$x\ \frac{dL^k_n}{dx} = nL^k_n(x) - (n+k)L_{n-1}(x) \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie $< r >_{nl}$ und $< r^{-1} >_{nl}$

(b) Man kann für $s \geq -2L-1$ im Wasserstoffatom folgendes zeigen:

$$\frac{s+2}{n^2} < r^{s+1} > -(2s+3)a_b < r^s > + \frac{s+1}{4}\left[(2l+1)^2 - (s+1)^2\right] a_b^2 < r^{s-1} >= 0 \tag{5}$$

berechnen Sie hieraus $< r^2 >_{nl}$ und $< r^3 >_{nl}$

(c) Vergleichen Sie $< r^2 >_{nl}$ mit $< r >^2_{nl}$. Wo ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für den Grundzustand am größten, vergleichen Sie mit a_b. Betrachten Sie die relative Ortsunschärfe $\frac{\Delta r_{nl}}{<r>_{nl}}$. Was passiert für wachsendes l und für wachsendes n, wie verhält sie sich für maximale l zu gegebenem m?

$\boxed{2}$: Störtheorie

Wir wollen die in der Vorlesung gelernte Methodik der Störtheorie auf einige Probleme anwenden. Betrachten Sie

(a) $\boldsymbol{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda\sqrt{2}^3\alpha^3 x^3$ und berechnen Sie die gestörten Zustände in erster Ordung, sowie die Energie in erster nicht verschwindender Ordnung.

(b) Wir wollen untersuchen, wie sich eine harmonische Strung in einem unendlich hohen Kastenpotential auswirkt.

(i) Gegeben sei folgendes Potential:

$$V = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

Lösen Sie die Schrdingergleichung und geben Sie die ungestörten Energien, sowie deren zugehörigen Energieeigenfunktionen an.

(ii) führen Sie nun einen Störoperator $\boldsymbol{H}_1 = \lambda x^2$ ein und berechnen Sie die Energiekorrektur in erster nicht verschwindender Ordnung.

$\boxed{3}$: Eigenzustände und Produkträume

Gegeben sei folgender Hamiltonoperator $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2$, wobei die Eigenzustnde der $\boldsymbol{H}_i$ bekannt seien. Gehen Sie davon aus, dass die Operatoren in verschiedenen Hamiltonräumen wirken. Konstruieren sie die Eigenzustände des Hamiltonoperators $\boldsymbol{H}$ (der im Produktraum $\boldsymbol{H}_1 \otimes \boldsymbol{H}_2$ wirkt) aus den gegebenen Zuständen. Was bedeutet die Konstruktion für Operatoren, welche von verschiedenen Koordinaten abhängen.