Ferienkurs zur Quantenmechanik 1

T. Heidsieck Blatt 3 WiSe 07/08

C. Paleani

$\boxed{1}$: Radialsymmetrischer Potentialtopf

Für die freie Schrödingergleichung $V(r) \equiv 0$ erhalten wir mit $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ und $z = kr$ die Radialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{l(l+1)}{z^2} + 1 \right) u_l(z) = 0 \tag{1}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$u_l(z) = \begin{cases} z j_l(z) = z^{l+1} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\sin z}{z} \\ z n_l(z) = -z^{l+1} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\cos z}{z} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Leiten Sie hieraus das asymptotosche Verhalten ab:

$$j_l(z) \overset{z \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(z - l\pi/2)}{z}, \qquad n_l(z) \overset{z \to \infty}{\longrightarrow} \frac{-\cos(z - l\pi/2)}{z} \tag{3}$$

(b) Betrachten Sie nun den endlichen sphärischen Kasten

$$V(r) = \begin{cases} v_0 < 0 \ldots & r \leq R \\ 0 \ldots & r > R \end{cases} \tag{4}$$

Geben Sie die physikalischen Randbedingungen sowohl fr Streulsungen als auch fr gebundene Lsungen an, konstruieren Sie einen Ansatz, der den Randbedingungen gengt und schtzen Sie die Entartung des Grundzustandes fr eine gebundene Lösung ab.

$\boxed{2}$:

Wir wollen uns in dieser Aufgabe mit (räumlichen) Drehimpulsen, Spins und deren Kopplungen beschftigen.

(a) Betrachten Sie ein System aus zwei Elektronen ohne räumlichen Drehimpuls (d.h. nur Spin). Bestimmen Sie die möglichen Kopplungen, veranschaulichen Sie sich diese graphisch und berechnen Sie die Clebsch-Gordan Koeffizienten.

(b) Betreachten Sie ein System aus einem beliebigem Bahndrehimpuls $j_1 = l$ und einem Spin $j_2 = s = 1/2$. Welche j's kommen vor und welche Werte kann die z-Komponente fr jedes j annehmen? Berechnen Sie die CGK fr l=1.

(c) Betrachten Sie die Kopplung analog zu (a) eines Systems aus zwei Spin-1 Teilchen zum Gesamtspin.

(d) Für ein System aus zwei Spins (s=1/2) laute der Hamiltonoperator

$$\boldsymbol{H} = a \; \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2$$

. Man bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte von $\boldsymbol{H}$.

$\boxed{3}$: Ein kleiner Beweis

Seien A, B hermitesche Operatoren mit $[A, B] = 0$. Und sei $\{|n\rangle\}$ ein System von nicht entarteten Eigenzuständen von A mit $A|n\rangle = a_n |n\rangle$. Zeigen Sie, dass dies auch Eigenzustände von B sind.

$\boxed{4}$: Harmonischer Oszillator in einer Dimension

Wir betrachten die stationäre Schrödingergleichung

$$H\psi = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi$$

(a) Schreibe die SG in dimensionslosen Variablen führe dazu analog zur Vorlesung $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ und $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ ein.

(b) Führen Sie analog zur Vorlesung die Grenzfallbetrachtungen durch.

(c) Machen Sie einen Potenzreihenansatz und finden Sie die Abbruchbedingung. Untersuchen Sie aus welchen physikalischen Prinzipien eine Abbruchbedingung resultieren muss.

(d) Aus der Abbruchbedingung lässt sich die Energie bestimmen! Geben sie die Energie an.

(e) Geben Sie die Lösungen für die 3 niedrigesten Energien an. Was müssen Sie beachten? Wie ist die Parität der Lösungen?