Ferienkurs zur Quantenmechanik 1

T. Heidsieck Blatt 1 WiSe 07/08

C. Paleani

---

1 : Unschärferelation und Operatoren

In der Vorlesung wurde die allgemeine Unschärferelation für hermitesche Operatoren bewiesen. Dazu sollen hier zunächst die Lücken geschlossen werden und einige Kommutatoren berechnet werden, um ein Gefühl für die gleichzeitige Messbarkeit von Observablen zu bekommen.

(a) Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ hermitesche Operatoren. Zeigen Sie $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ ist antihermitesch.

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert antihermitescher Operatoren imaginär ist.

(c) Berechnen Sie folgende Kommutatoren:
$\left[\boldsymbol{L}_i, \boldsymbol{x}^j\right]$, $\left[\boldsymbol{L}_i, \boldsymbol{p}_j\right]$, $\left[\boldsymbol{L}_i, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(r)\right]$, $\left[\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{x}^j\right]$, $[\boldsymbol{L}_i, \boldsymbol{L}_j]$
Was bedeuten diese Kommutatoren für die gleichzeitige Messbarkeit der zugehörigen Observablen?

2 : Gaußsches Wellenpaket

Durch ein Wellenpaket $\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\ C(k) \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$ mit $C(k) = \frac{2C_0}{\sqrt{2\pi}\Delta k} \exp\left\{ -\frac{(k-k_0)^2}{\left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2} \right\}$ werde die freie Bewegung eines Teilchens der Masse m beschrieben, wobei $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

(a) Man berechne die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ und man dikutiere ihren räumlichen und zeitlichen Verlauf.Wie groß ist die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets?

(b) Es sei Δx die Breite der Verteilung $\rho(x,t)$ aus Aufgabe a). Diese Breite ist definiert durch den Abfall von $\rho(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, t)$ auf 1/e des Wertes bei x_0, wobei x_0 die Lage des Maximums von $\rho(x)$ darstellt. Man zeige und interpretiere $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$

3 : Endlicher Potentialtopf

Wir betrachen ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases}$$

(a) Geben Sie die stationäre Schrödinger Gleichung für das Problem an.

(b) Lösen Sie die Schrödinger Gleichung in den verschiedenen Bereichen für Energien $E < 0$.

(c) Welche Randbedingungen gelten an den Stellen $x = 0$ und $x = L$? Welche physikalischen Bedingungen können Sie stellen?

(d) Benutzen Sie die Randbedingungen um eine Bedingung für Bindungszustände her zu leiten.

(e) Führen Sie die charakteristische Größe $\zeta = \frac{L}{\hbar}\sqrt{2mV}$ ein und zeigen Sie, dass die Bedingung für Bindungszustände umgeschrieben werden kann als

$$\cot(kL) = -\frac{\sqrt{\zeta^2 - k^2 L^2}}{kL}$$

und lösen Sie diese graphisch.

(f) Leiten Sie die Anzahl der Bindungszustände her. Für welche ζ gibt es genau einen Bindungszustand?

(g) Welche Energie hat dieser Zustand? Interpretieren Sie ihr Ergebnis.