Repetitorium Theoretische Elektrodynamik, WS 07/08

1. **Multiple Choice**

   a) Im Halbraum $z < 0$ befindet sich ein geerdeter Leiter. Eine Punktladung $q > 0$ befindet sich bei $\vec{r}_0 = (0, 0, d)^T$. Dann gilt

   ☐ Das Potential Φ im Halbraum $z > 0$ entspricht dem Potential, das von der Ladung q bei $\vec{r}_0 = (0, 0, d)^T$ erzeugt wird.

   ☒ Das Potential Φ im Halbraum $z > 0$ entspricht dem Potential, das von der Ladung q bei $\vec{r}_0 = (0, 0, d)^T$ und der induzierten Oberflächenladung erzeugt wird.

   ☐ Das Potential Φ im Halbraum $z > 0$ entspricht dem Potential, das von der Ladung q bei $\vec{r}_0 = (0, 0, d)^T$, der Spiegelladung $-q$ bei $-\vec{r}_0$ und der induzierten Oberflächenladung erzeugt wird.

   ☒ Das Potential Φ im Halbraum $z > 0$ entspricht dem Potential, das von der Ladung q bei $\vec{r}_0 = (0, 0, d)^T$ und der Spiegelladung $-q$ bei $-\vec{r}_0$ erzeugt wird.

   ☒ Das elektrische Feld $\vec{E}$ im Halbraum $z > 0$ erhält man durch $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

   ☐ Die Kraft, die auf die Ladung q ausgeübt wird, ist gegeben durch $\vec{F} = q\vec{E}$ mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$.

   ☒ Für das Potential Φ im Halbraum $z > 0$ gilt: $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \Phi(x, y, 0) = 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

   ☒ Für das Potential Φ im Halbraum $z > 0$ gilt: $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} + \vec{r}_0) \quad \Phi(x, y, 0) = 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

   b) Ein Leiter befindet sich im Raum, der Raum zwischen den Leitern ist ladungsfrei. Dann wird das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt durch:

   ☐ $\Delta\Phi = 0$

   ☒ $\Delta\Phi = 0$ und vorgegebene Ladungsverteilung auf Leiteroberfläche

   ☒ $\Delta\Phi = 0$ und vorgegebenes Potential auf Leiteroberfläche

   ☐ $\Delta\Phi = 0$, vorgegebene Ladungsverteilung und vorgegebenes Potential auf Leiteroberfläche

   c) Für den spurlosen Quadrupoltensor $\mathbf{Q}$ gilt:

   ☒ $\mathbf{Q}$ ist symmetrisch

   ☒ $\mathbf{Q}$ ist diagnonalisierbar

   ☐ $\mathbf{Q}$ enthält 6 voneinander unabhängige Komponenten

   ☐ $Spur(\mathbf{Q})$ wird bei Koordinatendrehungen wie ein Tensor 2. Stufe transformiert.

   ☐ Liegen sämtliche Ladungen in der x-y-Ebene, so ist $\mathbf{Q}$ immer diagonal.

   ☒ Liegen sämtliche Ladungen auf den Koordinatenachsen, so ist $\mathbf{Q}$ immer diagonal.

   ☒ Liegen sämtliche Ladungen in der x-y-Ebene, so ist $Q_{xz} = Q_{yz} = 0$

   ☒ Liegen sämtliche Ladungen auf den Koordinatenachsen, so ist $Q_{xz} = Q_{yz} = 0$

   d) Für die magnetische Feldkonstante μ_0 gilt:

   ☒ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

   ☐ μ_0 lässt sich über die Kraft zwischen 2 parallelen Drähten nur ungenau messen.

   ☒ Der Wert $\mu_0$ist durch die Definition des Ampere festgelegt.

e) Im folgenden betrachten wir zeitabhängige $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder

☐ Für eine Kurve γ ist das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{r}$ wegunabhängig.

☐ Es gilt $\vec{E}$ ist wirbelfrei.

☒ Das Magnetfeld des von der induzierten Spannung verursachten Stroms wirkt der Änderung des magnetischen Flusses entgegen.

☐ Das Faraday'sche Induktionsgesetz ist eng verknüpft mit dem Ohm'schen Gesetz.

☐ Für die Stromdichte $\vec{j}$ gilt die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

f) Für die elektrische Dipolstrahlung mit dem Dipolmoment $\vec{p}_0 e^{i\omega t}$ im Koordinatenursprung gilt:

☐ Die Polarisation von $\vec{E}$ ist radial.

☐ $\vec{k} \| \hat{e}_r$

☐ Das elektrische Feld schwingt senkrecht zur von $\hat{e}_r$ und $\vec{p}_0$ aufgespannten Ebene.

☐ Die maximale Amplitude des $\vec{E}$-Feldes erhält man in einem Punkt in der Richtung von $\vec{p}_0$

☒ Die maximale Amplitude des $\vec{B}$-Feldes erhält man in einem Punkt in der Ebene senkrecht zu $\vec{p}_0$

2. **Multipol-Entwicklung**

Vier Ladungen q befinden sich in einem kartesichen Koordinatensystem an den Punkten

$$(0, d, 0),\ (0, -d, 0),\ (0, 0, d),\ (0, 0, -d)$$

und vier Ladungen $-q$ an den Punkten

$$(-d, 0, 0),\ \left(-\frac{d}{2}, 0, 0\right),\ (d, 0, 0),\ (2d, 0, 0)$$

Berechnen Sie das Dipolmoment $\vec{p}$ und den spurlosen Quadrupoltensor $\mathbf{Q}$ dieser Ladungsanordnung.

Lösung. *Die Ladungsdichte der Anordnung ist gegeben durch*

$$\rho(\vec{r}) = q\{\delta(x)\delta(z)[\delta(y-d) + \delta(y+d)] + \delta(x)\delta(y)[\delta(z-d) + \delta(z+d)] -$$

$$-\delta(y)\delta(z)[\delta(x+d) + \delta(x+d/2) + \delta(x-d) + \delta(x-2d)]\}$$

Das Dipolmoment berechnet man aus

$$\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})d^3r = \begin{pmatrix} d + \frac{d}{2} - d - 2d \\ d - d \\ d - d \end{pmatrix} = -qd \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da alle Ladungen auf den Achsen liegen, folgt, dass $Q_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Da die Ladungsverteilung axialsymmetrisch bezüglich der x-Achse ist, gilt wegen der Spurfreiheit: $Q_{zz} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{xx}$. Wir müssen nur eine Komponente berechnen:

$$Q_{zz} = \frac{1}{3}\int \rho(\vec{r})(2z^2 - x^2 - y^2)d^3r =$$

$$= \frac{1}{3}q(-d^2 - d^2 + 2d^2 + 2d^2) - \frac{1}{3}q\left(-d^2 - \frac{d^2}{4} - d^2 - 4d^2\right) = \frac{11}{4}qd^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q} = \frac{11}{4}qd^2 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Magnetfeld einer rotierenden Scheibe**
Eine dünne Scheibe aus leitendem Material und mit Radius r sei gleichmäßig mit der Ladung Q aufgeladen. Die Scheibe dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die achse senkrecht zur Oberfläche der Scheibe. Berechnen Sie das magnetische Feld in der Achse der Anordnung? Hinweis: Benutzen Sie
$$\int \frac{r^3}{(z^2+r^2)^{3/2}} dr = \frac{2z^2+r^2}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Lösung. *Das Biot-Savart'sches Gesetz lautet allgemein:*
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$
Sei A die Kreisscheibe in der x-y-Ebene mit Radius R, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Die Stromdichte in unserem Fall ist gegeben durch
$$\vec{j}(\vec{x}') = \underbrace{\sigma\delta(z)\theta\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)}_{\rho(\vec{x}')} \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{x}')}_{\vec{v}}$$
Also gilt:
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \int_A \frac{(\vec{\omega} \times \vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx'dy' = \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \int_A \frac{(\vec{x}' - \vec{x}) \times (\vec{\omega} \times \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx'dy'$$
Wir wollen das Feld an der Stelle $\vec{x} = z\vec{e}_z$ berechnen.
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \int_A \frac{\vec{\omega}|\vec{x}'|^2 - \vec{x}' \overbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{x}')}^{0} - \vec{\omega} \overbrace{(\vec{x} \cdot \vec{x}')}^{0} + \vec{x}'(\vec{\omega} \cdot \vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx'dy' =$$
$$= \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \vec{\omega} \int_A \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx'dy' + \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} (\vec{\omega} \cdot \vec{x}) \underbrace{\int_A \frac{\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dx'dy' =}_{0}$$
$$= \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \vec{\omega} 2\pi \int_0^R \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma\mu_0}{2} \vec{\omega} \left. \frac{2z^2+r^2}{\sqrt{z^2+r^2}} \right|_0^R \underset{\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}}{=} \frac{Q\mu_0}{2\pi R^2} \left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - 2|z| \right) \vec{\omega}$$

4. **Relativistische Transformation eines Dipolfeldes**
Ein magnetischer Dipol (ruhend in K) sei parallel zur z-Achse ausgerichtet. (magnetisches Moment $\vec{m} = m\vec{e}_z$)

   a) Wie lauten die kartesischen Kompomenten des $\vec{B}$-Feldes?
   Lösung. *Das Magnetfeld eines Dipols ist gegeben durch*
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$
   für $\vec{m} = m\vec{e}_z$ ist somit
$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mzx}{r^5} \qquad B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mzy}{r^5} \qquad B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^5} (2z^2 - x^2 - y^2)$$

   b) Berechnen Sie nun das $\vec{E}-$ und $\vec{B}$-Feld eines gleichförmig in z-Richtung bewegten magnetischen Dipols, dessen Moment parallel zur z-Richtung orientiert ist. Zur Zeit $t = 0$ soll sich der Dipol im Nullpunkt von K befinden.

Transformation der Felder (K' bewegt sich in z-Richtung)

$$\begin{array}{cc} E'_z = E_z & B'_z = B_z \\ E'_x = \gamma(E_x - c_0\beta B_y) & B'_x = \gamma(B_x + (\beta/c_0)E_y) \\ E'_y = \gamma(E_y + c_0\beta B_x) & B'_y = \gamma(B_y - (\beta/c_0)E_x) \end{array}$$

Lösung. *Sei K' das Ruhesystem des Dipols, das sich entlang der positiven z-Richtung bewegt. Dort herrschen die Felder*

$$B'_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3mz'x'}{r'^5} \qquad B'_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3mz'y'}{r'^5} \qquad B'_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r'^5}(2z'^2 - x'^2 - y'^2)$$

$$\vec{E}' = \vec{0}$$

Der Beobachter befindet sich in K, welches sich von der Sicht des Dipols aus in negativer z-Richtung bewegt. Also gilt

$$\begin{array}{cc} B_x = \gamma B'_x & E_x = -\gamma(-\beta)c_0 B'_y = vB_y \\ B_y = \gamma B'_y & E_y = \gamma(-\beta)c_0 B'_y = -vB_x \\ B_z = B'_z & E_z = E'_z = 0 \end{array}$$

Mit der Lorentz-Transformation

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = \gamma(z - vt)$$

erhalten wir schließlich

$$B_x = \gamma^2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3mx(z-vt)}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{5/2}}$$

$$B_y = \gamma^2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3my(z-vt)}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{5/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\gamma^2(z-vt)^2 - x^2 - y^2}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{5/2}}$$

$$E_x = v\gamma^2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3my(z-vt)}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{5/2}}$$

$$E_y = -v\gamma^2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3mx(z-vt)}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{5/2}}$$

$$E_z = 0$$