1 Aufgabe 1

Eine metallsiche Kugeil mit Radius a habe die Ladung Q. Diese ist von einem linearen dielektrischen Material mit der Dielektrizitätkonstante ϵ und Radius b umgeben.

- (a) Stellen Sie die Randbedingungen auf
- (b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das Potential
- (c) Berechnen Sie die Polarisation
- (d) Berechnen Sie die gebundenen Ladungen

Lösung
Das Feld wird in 3 Bereiche geteilt:

$$\begin{array}{cc} 1 & r < a \\ 2 & a < r < b \\ 3 & b < r \end{array} \tag{1}$$

- (a) Das elektrische Feld ist hier rein Radial also sind nur die Bedingung

  $$D_3 - D_2 = 0 \qquad D_2 - D_1 = \sigma_f \tag{2}$$

  relevant

- (b) Wegen der Symmetrie gilt $na\vec{b}la \times \vec{D} = 0$ und man kann sofort das für D das feld einer geladenen Kugelschale ansetzen.

  $$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi r^2}\ \hat{e}_r & r > a \end{cases} \tag{3}$$

  Damit gilt für das elektrische Feld:

  $$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\ \hat{e}_r & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\ \hat{e}_r & b < r \end{cases} \tag{4}$$

  Das Potential ergibt sich dann z.B. durch Integrieren und anpassen der Integrationskonstanten mit $V(\infty) = 0$ zu

  $$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_0 b} - \frac{1}{\epsilon b} + \frac{1}{\epsilon a}\right) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & b < r \end{cases} \tag{5}$$

- (c)Die Polarisation ergibt sich einfach aus $vecE$ zu:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2}\ \hat{e}_r \tag{6}$$

- (d) Damit lassen sich die gebundenen Ladungen leicht berechnen

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\vec{P} = 0 \tag{7}$$

$$\sigma_b = \vec{P}\hat{n} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon b} & r = b \\ -\ \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon a^2} & r = a \end{cases} \tag{8}$$

2 Aufgabe 2

Eine Kugel von Radius Raus linearem dielektrischen Material befindet sich in einem homogenen Elektrischen Feld der Stärke $\vec{E} = E_0 \hat{e}_z$.

- (a) Stellen Sie die Randbedingungen auf
- (b) Berechnen Sie das Potential innerhalb und außerhalb der Kugel
- (c) Berechnen Sie das Feld im inneren
- (d) Berechnen Sie die Polarisation und die gebundenen Ladungen

Lösung
Das Feld wird in 2 Bereiche geteilt:

$$\begin{array}{cc} in & r < a \\ out & a < r < b \end{array} \tag{9}$$

- (a) Es gelten folgende Randbedinungen

$$\begin{array}{cccc} (i) & \vec{D}_{in}(R)\ \hat{e}_r = \vec{D}_{out}(R)\ \hat{e}_r & \rightarrow & \epsilon\ \partial_r V_{in}(R) = \epsilon_0\ \partial_r V_{out}(R) \\ (ii) & \vec{E}_{in}(R)\ \hat{e}_\theta = \vec{E}_{out}(R)\ \hat{e}_\theta & \rightarrow & \frac{1}{R}\ \partial_\theta V_{in}(R) = \frac{1}{R}\ \partial_\theta V_{out}(R) \\ (iii) & r \rightarrow \infty & & V_{out}\ \rightarrow\ -E_0 z = -E_0 r \cos\theta \end{array} \tag{10}$$

- (b) Am besten verwendet man den Separationsansatz für Rotationssymmetrie (Summenkonvention !!!):

$$\begin{aligned} V_{in} &= \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \\ V_{out} &= \left[C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{11}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

- keine Singularität bei r = 0 $\rightarrow$ $B_l = 0$ für alle l
- (iii) $\rightarrow$ $C_1 = 0$ $C_{l\neq 1} = 0$
- (i) $\rightarrow$ da die Legendre Polynome orthogonal sind müssen die Bediungen für jedes l einzeln erfüllt werden:

$$\begin{array}{rl} \epsilon_r l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)D_l}{R^{l+2}} & l \neq 1 \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2D_1}{R^3} & l = 1 \end{array} \tag{12}$$

- (ii) $\rightarrow$

$$\begin{array}{rl} A_l R^l = \frac{D_l}{R^{l+1}} & l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{D_1}{R^2} & l = 1 \end{array} \tag{13}$$

Damit folgt:

$$\begin{array}{ll} A_l = D_l = 0 & l \neq 1 \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r+2} E_0 & D_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0 \end{array} \tag{14}$$

und damit:

$$\begin{array}{r} V_{in} = -\frac{3E_0}{\epsilon_r+2} r\cos\theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r+2} z \\ V_{out} = -E_0 r\cos\theta + E_0 \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta \end{array} \tag{15}$$

- (c) Damit folt für das Feld im Inneren:

$$\vec{E} = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}\hat{e}_z \tag{16}$$

- (d) Damit folt für die Polarisation:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\ 3E_0\ \hat{e}_z \tag{17}$$

Und für die gebundenen Ladungen:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\vec{P} = 0 \tag{18}$$

$$\sigma_b = \vec{P}\hat{n} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\ 3E_0\ \cos\theta \tag{19}$$

3 Aufgabe 3

Ein Plattenkondensator aus 2 quadratischen Platten mit Größe l und Abstand d tragen jeweils die Ladung +Q bzw. -Q. In einen Teil des Plattenkondensators (Lämge r Breite l ($r \prec l$)) sei ein Dielektrikum eingeschoben (Gesamtmaße l x l) $\epsilon \succ 0$ (Dicke d). Der Bereich mit Dielektrikum werde mit I bezeichnet, der andere mit II.

- (a) Leiten Sie Beziehungen her zwischen der Oberflächenladungsdichte σ und der dielektrischen Verschiebung D jeweils in I und II. Welche Beziehung besteht jeweils zwichen dem $\vec{D}_I$ und $\vec{D}_{II}$ sowie $\vec{E}_I$ und $\vec{E}_{II}$
- (b)Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichten der Kondensatorplatten und das elektrische Feld zwischen den Platten. Beachten Sie dass die Gesamtladung jeder Platte Q ist.
- (c)Berechnen Sie die im Feld gespeicherte Energie
- (d) Berechnen Sie die auf die Grenzfläche ausgeübte Kraft

Lösung

- (a) Mit Hilfe des Gaußschen Satzen und der Symmetrie folgt:

$$D_I = \sigma_{fI}\ \hat{e}_z \qquad D_{II} = \sigma_{f2}\ \hat{e}_z \tag{20}$$

Die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ müssen stetig sein also gilt:

$$\vec{E_I} = \vec{E_{II}} \qquad \vec{D}_I = \epsilon_r \vec{D}_{II} \tag{21}$$

und somit auch:

$$\sigma_I = \epsilon_r \sigma_{II} \tag{22}$$

- (b) Da die Gesamtladung einer Platte Q beträgt gilt:

$$Q = \sigma_I sr + \sigma_{II}(l-r)s = \sigma_{II} s\,[s\epsilon_r + (l-r)] \tag{23}$$

$$\rightarrow \qquad \sigma_{II} = \frac{Q}{s(l+r(\epsilon_r-1))} \qquad \sigma_I = \frac{\epsilon_r Q}{s(l+r(\epsilon_r-1))} \tag{24}$$

Damit folgt:

$$\begin{array}{ll} D_I = \frac{\epsilon_r Q}{s(l+r(\epsilon_r-1))} & E_I = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{s(l+r(\epsilon_r-1))} \\ D_{II} = \frac{Q}{s(l+r(\epsilon_r-1))} & E_{II} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{s(l+r(\epsilon_r-1))} \end{array} \tag{25}$$

- (c) Für die im Feld gespeicherte Energie gilt:

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r \vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\int_{V_I} d^3r \vec{D}_I \vec{E}_I + \frac{1}{2}\int_{V_{II}} d^3r \vec{D}_{II}\vec{E}_{II} \tag{26}$$

$$U = \frac{1}{2}\ \vec{E}^2 \epsilon_0\,[V_I\epsilon_r + V_{II}] = \frac{Q^2}{2\epsilon_0}\frac{d}{s[l+r(\epsilon_r-1)]} \tag{27}$$

- (d) Damit lässt sich die Kraft auf das Dielektrikum berechnen:

$$F = \partial_r U = \frac{Q^2}{2\epsilon_0}\frac{d(\epsilon_r-1)}{s[l+r(\epsilon_r-1)]^2} \tag{28}$$

4 Aufgabe 4

Ein unendlich langer Zylinder mit Radius R trage die magnetisierung $\vec{M} = ks\hat{z}$. Dabei sei k einen Konstante und s der Abstand zur Achse.
Bestimmen Sie das Magnetfeld innen und außen durch 2 verschiedene Methoden:

- (a) Bestimmen Sie alle gebundenen Ströme und das Feld dass sie erzeugen
- (b) Bestimmen Sie über das "'Ampere'sche Gesetz für $\vec{H}$" und daraus dann $\vec{B}$

Lösung

- (a)Die gebundenen Ströme ergeben sich zu:

$$\vec{j}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -k\ \vec{e}_\phi \tag{29}$$

$$\vec{k}_b = \vec{M} \times \hat{n} = kR\ \vec{e}_\phi \tag{30}$$

  Mit Hilfe des Ampereschen Gesetzes berechnet man das Feld dieser Ströme. Das Feld kann wegen Symmetrie bzw. $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ nur in z-Richtung zeigen. Mit der integralen Form des Ampereschen Gesetztes und einer Schleife in der $\rho - z$ Ebene erhällt man:

$$BL = \mu_0 I_{end} = \mu_0[LkR - Lk(R-\rho)] = \mu_0 Lk\rho \tag{31}$$

$$\rightarrow \qquad \vec{B}(\rho) = \mu_0 k\rho\ \hat{e}_z \tag{32}$$

- (b) Mit Hilfe des "Ampere'schen Gesetzes" für H sieht man: $H = 0$. Das Feld B ergibt sich dann zu:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 k\rho\ \hat{e}_z \tag{33}$$

5 Aufgabe 5

Ein Koaxialkabel bestehe aus 2 unendlich dünnen Hohlzylindern mit Radien a und b mit $a < b$. Der Zwischenraum sei mit einem Isolator $\mu \neq 1$ gefüllt. Diese Zylinder seien beide mit einem Strom der Stärke I in entgegengesetzter Richtung durchflossen.

- (a) Bestimmen Sie $\vec{H}$ und daraus $\vec{B}$ für Beliebige Abstände s zur z-Achse.

- (b) Bestimmen Sie die Magnetisierung und die gebundenen Flächenstromdichten.
- (c) Zeigen Sie dass diese für die Unstetigkeit der Tangentialkomponente von B verantwortlich sind

Lösung
Das Feld wird in 3 Bereiche geteilt:

$$\begin{array}{cc} 1 & s < a \\ 2 & a < s < b \\ 3 & s < r \end{array} \tag{34}$$

- (a) Aufgrund der Symmetrie kann man das "Ampere Gesetz"' für H anwenden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad \rightarrow \quad H = \frac{I_{enc}}{2\pi s} \tag{35}$$

  Damit gilt für die Felder:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \vec{H}_1 = 0 & \vec{B}_1 = 0 \\ 2 & \vec{H} = \frac{I}{2\pi s}\ \vec{e}_{phi} & \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi s}\ \vec{e}_\phi \\ 3 & \vec{H}_1 = 0 & \vec{B}_1 = 0 \end{array} \tag{36}$$

- (b)Für die Magnetisierung $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$ ergibt sich:

$$\vec{M} = \begin{cases} \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi s}\ \vec{e}_\phi & a < s < b \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{37}$$

  Betrachte Stelle $s = a$. Für den gebunden Oberflächenstrom gilt:

$$\hat{n} = -\hat{e}_\rho \quad \rightarrow \quad \vec{k}_{b_a} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a}\ \hat{e}_z \tag{38}$$

  Das Feld das dieser Strom an der Stelle $s = a$ erzeugt beträgt:

$$2\pi a B_a = \mu_0 2\pi k_{b_a} \quad \rightarrow \quad \vec{B}_a(a) = \mu_0 \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a}\ \hat{e}_\phi \tag{39}$$

  Vergleiche mit Sprung des B-Feldes bei $s = a$:

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}_2(a) - \vec{B}_1(a) = \mu_0 \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a}\ \hat{e}_\phi \tag{40}$$

  Analog bei $s = b$:

$$\vec{k}_{b_b} = -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b}\ \hat{e}_z \tag{41}$$

$$\vec{B}_b(b) = -\mu_0 \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b}\ \hat{e}_\phi = \Delta\vec{B}(b) \tag{42}$$

6 Aufgabe 6

Betrachten Sie eine dia bzw. Paramagnetische Kugel mit Radius R und Permeabilität μ die sich in einem äußeren Feld $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z \quad B_0 > 0$ befindet

- Da keine freien Ströme existieren kann $\vec{H}$ als Gradient eines Skalarfeldes ausgedrückt werden. Berechnen Sie Φ
- Berechnen Sie $\vec{B}$ und $\vec{M}$ und skizzieren Sie die Felder

Lösung
Lösung völlig analog mit folgenden Ersetzungen:

$$\begin{array}{ccc} \vec{D} & \rightarrow & \vec{B} \\ \vec{E} & \rightarrow & \vec{H} \\ E_0 & \rightarrow & \frac{B_0}{\mu_0} \\ \epsilon & \rightarrow & \mu \end{array} \tag{43}$$

- (a) Damit lautet das Potential:

$$\begin{array}{rl} \Phi_{in} = & -\frac{3B_0}{\mu_0(\mu_r+2)} r\cos\theta \\ \Phi_{out} = & -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\theta + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta \end{array} \tag{44}$$

- (b) Für das Feld innen ergibt sich sofort:

$$\vec{B}_i = B_0 \frac{3\mu_r}{\mu_r+2}\ \hat{e}_z \tag{45}$$

Für das Feld im äußeren sieht man am besten dasses sich um die Überlagerung von $\vec{B}_0$ und einem Dipol handelt:

$$\Phi_{out} = -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\theta + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\hat{r}}{r^2} \qquad \vec{m} = \frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2}R^3\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \tag{46}$$

Und damit folgt für das Feld:

$$\vec{B}_{out} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right] \tag{47}$$

Fürm die Magnetisierung gilt dann.

$$\vec{M} = \frac{(\mu_r-1)}{\mu_r\mu_0}\vec{B} = 3B_0\frac{\mu_r-1}{\mu_0(\mu_r+2)}\ \hat{e}_z \tag{48}$$