Repetitorium Theoretische Elektrodynamik, WS 07/08

1.1 (Ergänzungen zur Vorlesung)

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der 1.Maxwellschen Gleichung. Benutzen Sie dazu den experimentell gefundenen Ausdruck für das elektrische Feld einer Punktladung im Ursprung:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}|^2}$$

Lösung:
Wir zeigen die Aussage zunächst für eine Punktladung:
Für eine beliebige geschlossene Oberfläche (bei Punktladungen o.B.d.A. eine Kugel vom Radius R) S um die Punktladung gilt:

$$\int_V div(\vec{E})d^3x \underbrace{=}_{Gauss} \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\ d^2x = \oint_S E_r(R)\widehat{e}_r d^2x = 4\pi R^2 E_r(R) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Mit dem Superpositionsprinzip folgt für beliebige Ladungsverteilungen:

$$\int_V div(\vec{E})d^3x = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho(\vec{x})\ d^3x \Rightarrow div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

b) Zeigen Sie die Gültigkeit der 4.Maxwellschen Gleichung. Verwenden Sie hierzu das experimentell gefundene Ampèrsche Gesetz:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Lösung:
Sei F eine durch ∂F begrenzte Fläche, durch die der gesamte Strom senkrecht hindurchfließt:

$$\int_A rot(\vec{B})\ d^2x \underbrace{=}_{Stokes} \oint_{\partial F} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow rot(\vec{B}) = \mu_0\vec{j}$$

c) Zeigen Sie unter Verwendung der Maxwellgleichungen die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung.

Lösung:
Zuhächst stellen wir wegen der 4.Maxwellgleichung fest, dass im statischen Fall gilt:

$$div(\vec{j}) = \frac{1}{\mu_0}div(rot)\vec{B} = 0$$

Ströme treten also in rein statischen Problemen nur als Ringströme auf. Weiterhin nehmen wir Ladungserhaltung an also $\dot{Q} = -I$. Es folgt für beliebige Volumina:

$$\partial_t \int_V \rho(\vec{x},t)\ d^3x = \dot{Q} = -I = -\oint_{\partial V} \vec{j}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\ d^2x \underbrace{=}_{Gauss} = -\int_V div(\vec{j}(\vec{x}))\ d^3x$$

$$\Rightarrow \partial_t\rho(\vec{x},t) + div(\vec{j}(\vec{x},t)) = 0$$

d) Zeigen Sie, dass das magnetische Moment die Form wie in der Vorlesung angegeben annimmt am Beispiel eines Stromdurchflossenen Kreisringes.

(Hinweis: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{x}}{r^2}$)

Lösung:
Wir setzen in Kugelkoordinaten:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} cos(\phi)sin(\theta) \\ sin(\phi)sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}' = R\begin{pmatrix} cos(\phi') \\ sin(\phi') \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad d\vec{s}' = R\cdot d\phi' \begin{pmatrix} -sin(\phi') \\ cos(\phi') \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\oint_c \vec{x}'\cdot\hat{x}\ d\vec{s}' = R^2\int_0^{2\pi} d\phi' \begin{pmatrix} -sin(\phi') \\ cos(\phi') \\ 0 \end{pmatrix} (cos(\phi')cos(\phi)sin(\theta) + sin(\phi')sin(\phi)sin(\theta))$$

Die Terme, die im Integral Terme von der Form $sin^2(\phi')$ bzw. $cos^2(\phi')$ werden zu π. Gemischte Sinus- und Kosinusterme haben Stammfunktionen von der Form $sin^2(\phi')$ bzw. $cos^2(\phi')$ und fallen daher weg.

$$\Rightarrow \oint_c \vec{x}'\cdot\hat{x}\ d\vec{s}' = \pi R^2 \begin{pmatrix} -sin(\phi)sin(\theta) \\ cos(\phi)sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektorielle Fläche in unserem Fall ist $\vec{F} = \pi R^2\cdot\hat{e}_z$. Man erkennt nun:

$$\oint_c \vec{x}'\cdot\hat{x}\ d\vec{s}' = \vec{F}\times\hat{x}$$

Also gilt für ein reines Dipolpotential mit der angegebenen Formel unter Berücksichtigung der Multipolentwicklung die Identität:

$$\vec{m} = I\vec{F}$$

1.2 ($\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder verschiedener Ladungsverteilungen)

a) Berechnen Sie das Elektrische Feld, sowie das Potential einer Vollkugel mir Radius R in den beiden Fällen:

i) Einer leitenden Kugel mit Gesamtladung Q
ii) Einer radialen Ladungsverteilung $\rho(r) = \rho_0 e^{r/a}$

Lösung:
i):
Das Problem ist kugelsymmetrisch, daher interessieren uns nur die Radialkomponenten der einzelnen Größen. Da in einem Leiter keine elektrischen Felder vorliegen und daher alle Ladungen den maximalen Abstand voneinander haben, gilt:

$$\rho(r) = \delta(R)\sigma = \delta(R)\frac{Q}{4\pi R^2}$$

Es folgt stets aufgrund der Symmetrie:

$$\vec{E}(\vec{x}) = E_r(r)\widehat{e}_r \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{x})d\vec{f} = \oint_{\Omega} r^2 E_r(r)d\Omega = 4\pi r^2 E_r(r)$$

Weiterhin gilt:

$$\int_V div(\vec{E})d^3x' \underbrace{=}_{Maxwell} \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})d^3x' = \begin{cases} 0; & r < R \\ \frac{Q}{\epsilon_0}; & r > R \end{cases}$$

Es folgt für das Feld mit dem Satz von Gauß:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\begin{cases} 0; & r < R \\ 1; & r > R \end{cases}$$

Das Potential ist erklärt durch:

$$\Phi(r) = \int_r^\infty E_r(r)dr \Rightarrow \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases} \frac{1}{R}; & r < R \\ \frac{1}{r}; & r > R \end{cases}$$

ii):
Das Vorgehen ist Analog zu oben. Als Gesamtladung erhalten wir durch partielle Integration:

$$Q = 4\pi\int_0^R r^2\rho_0 e^{r/a}dr = 4\pi\rho_0((aR^2 - 2a^2R + 2a^3)e^{R/a} - 2a^3)$$

Es folgt außerhalb der Kugel:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0((aR^2 - 2a^2R + 2a^3)e^{R/a} - 2a^3)}{\epsilon_0 r^2}$$

für das Potential folgt hier:

$$\Phi(r) = \frac{\rho_0((aR^2 - 2a^2R + 2a^3)e^{R/a} - 2a^3)}{\epsilon_0 r}$$

Im Inneren der Kugel finden wir:

$$E_r(r) = \frac{\rho_0((ar^2 - 2a^2r + 2a^3)e^{r/a} - 2a^3)}{\epsilon_0 r^2}$$

Auf eine Berechung des Potentials wollen wir verzichten.

b) Berechnen Sie das elektrische bzw. magnetische Feld sowie die entsprechenden Potentiale für eine unendlich langes Koaxialkabel mit den Radien a<b:

i) Wenn der Innenleiter von einem Strom I_0 durchflossen wird
ii) Wenn Innen- bzw. Außenleiter von den Strömen I_0 bzw. $-I_0$ durchflossen werden
iii) Wenn der Innenleiter mit einer konstanten Längenladungsdichte λ geladen ist
iv) Wenn Innen- bzw. Außenleiter mit den Längenladungsdichten λ bzw. $-\lambda$ geladen sind

Lösung:
i):
Das Problem ist Zylindersymmetrisch, d.h. das Magnetfeld hat nur eine Komponente in ϕ-Richtung:

$$\vec{B}(\vec{x}) = B_\Phi(r) \cdot \widehat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B_\Phi(r)$$

Weiterhin gilt:

$$\int_A rot\vec{B} d^2x = \mu_0 \int_A \vec{j} d^2x = \begin{cases} \mu_0 I \ ; & r > a \\ \mu_0 j \pi r^2 \ ; & r < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ ; & r > a \\ \frac{\mu_0 j r}{2} \ ; & r < a \end{cases}$$

Es ergeben sich keine weiteren Fallunterscheidungen.
Die Φ-Komponente der Rotation hat in Zylinderkoordinaten die Form:

$$(\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z)$$

$\vec{A}$ hat nur eine z-Komponente, da sonst $\vec{B}$ nicht rein in ϕ-Richtung Läge.

$$\Rightarrow B_\phi(r) = -\partial_\rho A_z(r) \Rightarrow A_z(r) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2\pi} ln(\frac{a}{r}) \ ; & r > a \\ -\frac{\mu_0 j (a^2 - r^2)}{4} \ ; & r < a \end{cases}$$

Der Potentialnullpunkt liegt auf der Leiteroberfläche (r=a). ii):
Alles analog zu i). Außerhalb von b sind das Feld und Vektorpotential jedoch 0.

iii):
Aus symmetriegründen hat $\vec{E}$ nur eine Komponente in r-Richtung. Es gilt:

$$\oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{n} d^2x = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi r E_r(r) dz$$

Andererseits ist:

$$\int_V div\vec{E} d^3x = \int_V \frac{\lambda \delta(r-a)}{2\pi a \epsilon_0} d^3x = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \frac{\lambda}{\epsilon_0} \ ; & r > a \\ 0 \ ; & r < a \end{cases} dz$$

D.h. es gilt:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \ ; & r > a \\ 0 \ ; & r < a \end{cases}$$

Das Potential ergibt sich analog zu oben mit Nullpunkt im Innenleiter zu:

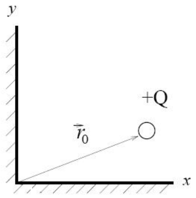
$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} ln(\frac{a}{r}) \ ; & r > a \\ 0 \ ; & r < a \end{cases}$$

iv):
Wieder analog wobei außerhalb des Außenleiters Feld und Potential 0 sind. Das Potential innerhalb des Außenleiters verändert sich damit zu:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln(\frac{a}{r}) \ ; \quad b > r > a \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln(\frac{a}{b}) \ ; \quad r > b \\ 0 \ \ sonst \end{cases}$$

1.3 (Spiegelladung)

Betrachten Sie folgende Anordnung.



a) Verwenden Sie die Methode der Spiegelladung um die Greensche Funktion zu finden

Lösung:
Die Greensche Funktion muss eine Grundlösung der Poisson-Gleichung sein und gleichzeitig die Randbedingungen erfüllen also:
$\Delta G(\vec{x},\vec{x}') = 4\pi \sum_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i')$ und $G(\vec{x},\vec{x}')|_{x=0 \vee y=0} = 0$
Mit der Methode der Spiegelladung findet man als Lösung:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{r}_0|} + \frac{1}{|\vec{x}+\vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{r}_2|}$$

wobei $\vec{r}_1$ definiert ist als $\vec{r}_0$ mit negativer x- und $\vec{r}_2$ als $\vec{r}_0$ mit negativer y-Komponente.

b) Berechnen Sie ds Monopol- ,Dipol- und Quadrupolmoment

Lösung:
Es gilt mit $\rho(\vec{x}') = q\delta(\vec{x}'-\vec{r}_0)$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x}-\vec{r}_0|} + \frac{q}{|\vec{x}+\vec{r}_0|} - \frac{q}{|\vec{x}-\vec{r}_1|} - \frac{q}{|\vec{x}-\vec{r}_2|}\right)$$

Die Ladungsverteilung scheint nun also anders zu sein als zu Beginn (Influenzladungen):

$$\rho(\vec{x}') = q\delta(\vec{x}'-\vec{r}_0) + q\delta(\vec{x}'+\vec{r}_0) - q\delta(\vec{x}'-\vec{r}_1) - q\delta(\vec{x}'-\vec{r}_2)$$

Damit ist das Monopolmoment sofort als 0 erkennbar.
Auch das Dipolmoment ist sofort als 0 erkennbar, wenn man $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ beachtet.
Für den Quadrupoltensor setzen wir zunächst die z-Komponente aller Vektoren =0. Es folgt:

$Q_{xx} = 2q(2r_{0,x}^2 - r_{0,y}^2) - 2q(2r_{1,x}^2 - r_{1,y}^2) = 0 = Q_{yy} = Q_{zz}$

Für die außerdiagonalen Elemente folgt:
$Q_{yx=}Q_{xy} = 6q(r_{0,x}r_{0,y}) - 6q(r_{1,x}r_{1,y}) = 12q(r_{0,x}r_{0,y})$
Die anderen Außerdiagonalelemente sind 0, da alle z-Komponenten 0 sind.

c) Wie sieht das elektrische Feld aus? Welche Kraft wirkt auf die Ladung

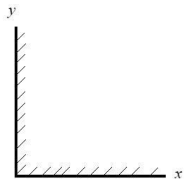
Lösung:
$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q(\vec{x}-\vec{r}_0)}{|\vec{x}-\vec{r}_0|^3} + \frac{q(\vec{x}+\vec{r}_0)}{|\vec{x}+\vec{r}_0|^3} - \frac{q(\vec{x}-\vec{r}_1)}{|\vec{x}-\vec{r}_1|^3} - \frac{q(\vec{x}-\vec{r}_2)}{|\vec{x}-\vec{r}_2|^3}\right)$
Es resultiert für die Ladung am Ort $\vec{r}_0$ eine Kraft von:

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2\vec{r}_0}{8r_0^3} - \frac{2r_{0,x}\vec{e}_x}{8r_{0,x}^3} - \frac{2r_{0,y}\vec{e}_y}{8r_{0,y}^3}\right)$$

Diese Kraft ist insgesamt auf die Ecke hin gerichtet.

1.4 (Potential an einer Ecke)

Nun betrachten wir die Anordnung aus 1.5 umgekehrt:



a) Das Potential im Leiter sei auf 0 festgelegt, berchnen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes das Potential außerhalb des Leiters

Lösung:
Zunächst stellen wir fest, dass das Problem symmetrisch in z-Richtung ist.
Es gilt nun die Poisson-Gleichung:

$$\Delta\Phi = 0$$

Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (ohne z-Richtung) hat die Form:

$$\Delta = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2$$

Wähle den Separationsansatz $\Phi(r,\phi) = a(r)b(\phi)$
Es folgt:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}(a'(r) + ra''(r))b(\phi) + \frac{a(r)}{r^2}b''(\phi) = 0$$

diese Gleichung zerfällt komplett in Terme nur abhängig von r bzw. ϕ, wenn man sie mit $\frac{r^2}{\Phi}$ multipliziert.

$$r(a'(r) + ra''(r))\frac{1}{a(r)} + \underbrace{\frac{b''(\phi)}{b(\phi)}}_{=:c^2} = 0$$

In den Fällen $c^2 \geq 0$ folgt aus den Randbedingungen $b(0) = b(\frac{3\pi}{2}) = 0$ auch $b(\phi) = 0 \forall \phi$. Diese Fälle interessieren nicht weiter und wir betrachten $0 > c^2 =: -\nu^2$. Wir haben nun eine Schwingungsgleichung:

$$\partial_\phi^2 b(\phi) + \nu^2 b(\phi) = 0$$

Lösungsansatz: $b(\phi) = Acos(\nu\phi) + Bsin(\nu\phi)$ Aus den Randbedingungen folgt nun: $A = 0$ und $\nu\frac{3}{2}\pi = m\pi; m \in \mathbb{N}$, also

$$b(\phi) = A_m sin\left(\frac{2}{3}m\phi\right)$$

nun wenden wir uns a(r) zu. mit obigen Bezeichnungen gilt:

$$r(a'(r) + ra''(r)) = \underbrace{\nu_m^2}_{=\frac{4}{9}m^2} a(r)$$

Ansatz hierfür ist: $a_m(r) = C_m r^{\frac{2}{3}m} + D_m r^{-\frac{2}{3}m}$
Hier haben wir als Randbedingung $a_m(0) = 0$. Es folgt also $D_m = 0$

Der endgültige Ausdruck für das Potential ist eine Linearkombination aller Lösungen, also:

$$\Phi(r,\phi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m sin\left(\frac{2}{3}m\phi\right) C_m r^{\frac{2}{3}m} =: \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{A}_m sin\left(\frac{2}{3}m\phi\right) r^{\frac{2}{3}m}$$

b) Bestimmen Sie das Verhalten des Potentials in der Nähe der Ecke. Wie verhält sich die elektrische Feldstärke nahe an der Ecke?

(Der Laplaceoperator hat in Zylinderkoordinaten die Form: $\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2$)

Lösung:

$$r \to 0 \Rightarrow \Phi(r,\phi) \propto r^{\frac{2}{3}}$$

Der relevante Gradient hat die Form:

$$\vec{\nabla}_{r,\phi} = \partial_r \widehat{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\phi \widehat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\phi) = -\widehat{e}_r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{3}m\widetilde{A}_m sin\left(\frac{2}{3}m\phi\right) r^{\frac{2}{3}m-1} - \widehat{e}_\phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{3}m\widetilde{A}_m cos\left(\frac{2}{3}m\phi\right) r^{\frac{2}{3}m-1}$$

Man erkennt $r \to 0 \Rightarrow E$ divergent.

1.5 (Dipolfelder)

Berechnen Sie die Felder elektrischer und magnetischer Punktdipole und bestimmen Sie daraus die Energie eines Punktdipols im Dipolfeld eines 2. Punktdipols mit entgegengesetztem Dipolmoment im Abstand r.

Lösung:
Es gilt:

$$\Phi_{dip}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{p}\widehat{x})\widehat{x} - \vec{p}}{|\vec{x}|^3}$$

In Aufgabe 1 d) ist das Vektropotential für ein magnetisches Dipolfeld gegeben.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \widehat{x}}{x^2}$$

Es gilt die Identität:

$$rot\left(\vec{m} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right) = \underbrace{\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\vec{\nabla}\right)\vec{m}}_{=0} - \left(\vec{m}\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \underbrace{\vec{m}\ div\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)}_{=0} - \underbrace{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}div(\vec{m})}_{=0} = \frac{3(\vec{m}\widehat{x})\widehat{x} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m}\widehat{x})\widehat{x} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

Für die Energie betrachten wir nur den elektrischen Fall. Der magnetische Fall sieht genauso aus.

$$U_{el} = -\vec{p}_1 E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p^2 - 3p^2 cos^2(\theta)}{r^3}$$

Wobei θ den Winkel zwischen den Dipolmomenten und der Verbindungsachse der Dipole angibt.

1.6 (Quadratur des Kreises)

Betrachten Sie einen Draht der Länge L, der von einem Strom I durchflossen wird und berechnen Sie für folgende Anordnungen das Magnetfeld auf der z-Achse:

a) Der Draht ist zu einem Kreis gebogen (Biot-Savartsches Gesetz)

Lösung:
Zunächst leiten wir das Biot-Savartsche Gesetz für Linienströme her:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_c \frac{d\vec{s}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Rotation uns Integral können vertauscht werden, da die Rotation in Koordinaten von x und das Integral über Koordinaten x' gebildet werden. Aus dem selben Grund folgt auch:

$$rot_x\left(\frac{d\vec{s}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right) = \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times d\vec{s}' = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \times d\vec{s}'$$

Es folgt das Biot-Savartsche Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_c \frac{d\vec{s}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Im Falle des Kreisdrahtes gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ ; \ \vec{x}' = \underbrace{\frac{L}{2\pi}}_{=R}\begin{pmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ d\vec{s}' = \tfrac{L}{2\pi}d\phi \begin{pmatrix} -sin(\phi) \\ cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I L^2}{16\pi^3}\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4\pi^2} + z^2}^3}\int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} cos(\phi)\frac{2\pi}{L}z \\ sin(\phi)\frac{2\pi}{L}z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I L^2}{8\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4\pi^2} + z^2}^3}$$

b) Der Draht ist zu einem Quadrat gebogen (Randeffekte heben sich auf und müssen nicht berücksichtigt werden)

Lösung:
Aus Symmetriegründen gilt: $\vec{B}(z) = B_z \widehat{e}_z$ und B_z setzt sich aus den 4 Einzelbeiträgen zusammen. Wir berechnen den Beitrag des rechten Drahtes und multiplizieren ihn mit 4. Dazu benötigen wir:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{a\sqrt{a+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a+x^2}^3}$$

Nun gilt:
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{L}{8} \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$; $d\vec{s}' = dy \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Es folgt für die gesamte z-Komponente des B-Feldes:

$$B_z(z) = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{L}{8}\int_{-\frac{L}{8}}^{\frac{L}{8}} dy \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{64}+z^2+y^2}^3} = \frac{\mu_0 I L}{8\pi}\left[\frac{y}{\left(\frac{L^2}{64}+z^2\right)\sqrt{\frac{L^2}{64}+z^2+y^2}}\right]_{-\frac{L}{8}}^{\frac{L}{8}} =$$

$$\frac{\mu_0 I L^2}{32\pi}\left(\frac{1}{\left(\frac{L^2}{64}+z^2\right)\sqrt{\frac{L^2}{32}+z^2}}\right)$$