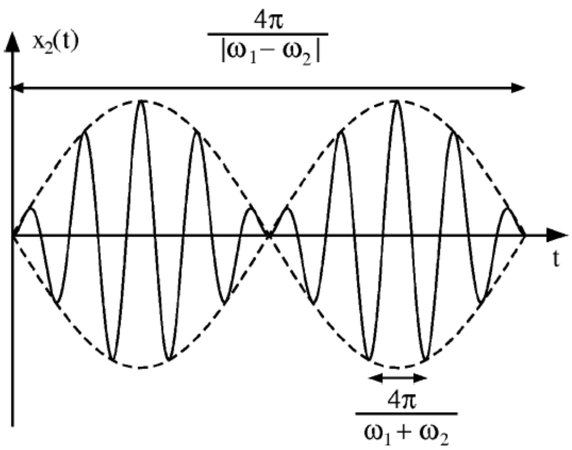
B.4. Lösungsskizzen der Übungsaufgaben zum Kapitel 4

Aufgabe 40 (Fragen)

1. *Wie sieht die DGL für eine harmonische Schwingung aus?*
2. *Welche unterschiedlichen Ausbreitungsarten gibt es für mechanische Wellen?*
3. *Harmonische Schwingungen mit Reibung: Welche drei Fälle werden bei der Lösung unterschieden?*
4. *Was ist eine erzwungene Schwingung?*
5. *Wie lautet die allgemeine Wellengleichung?*
6. *Was ist der Dopplereffekt?*
7. *Wie sieht das Schwingungsbild einer Schwebung aus?*
8. *Was ist Dispersion?*

Lösung

1. $\ddot{x} + Cx = 0$
2. *longitudinal: Amplitude parallel Ausbreitungsgeschwindigkeit*
   transversal: Amplitude senkrecht Ausbreitungsgeschwindigkeit
3. *Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall*
4. *Schwingung eines Systems wird durch eine äußere Kraft angeregt*
5. $\ddot{y} = v^2 y$"
6. *Bewegt sich der Empfänger relativ zur Quelle (oder umgekehrt), so nimmt er eine andere Frequenz wahr, als die Quelle aussendet.*
7. *Schwebung*



8. *Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle hängt von der Wellenlänge ab. Dies führt zum räumlichen und zeitlichen Auseinanderlaufen der Wellenpakete.*

Aufgabe 41 (Flachwasserwellen) *Wie schwappt das Wasser in einem flachen Becken hin und her? Allgemeiner betrachten wir Wellen, die sehr lang sind verglichen mit der Tiefe des Beckens, so dass* *das Wasser über die ganze Tiefe mit gleicher Geschwindigkeit v nach rechts oder links strömt. Wie hängen v und seine Änderung von der Druckverteilung ab, wovon hängt wieder diese ab? Wie verschiebt sich der Wasserspiegel unter dem Einfluss dieser Strömung? Stellen Sie eine Wellengleichung auf und lesen Sie Ausbreitungsgeschwindigkeit, Periode usw. der Flachwasserwellen ab.*

Lösung

Das Becken habe die mittlere Tiefe H, die groß ist gegen die Unterschiede in der lokalen Tiefe h des Wellenprofils. Das Wasser wird beschleunigt durch Druck-, d.h. Höhenunterscheide:

$$\rho\dot{v} = -p' = -g\rho h'$$

also

$$\dot{v} = -gh'$$

Räumliche Unterschiede in v bringen einen effektiven Zu- oder Abfluss, d.h. Änderungen von h:

$$B\dot{h} = -HBv'$$

Wobei B die Breite des Beckens ist. Also

$$v' = -\frac{\dot{h}}{H}$$

Man leitet die erste Gleichung nach x und die zweite nach t ab:

$$\dot{v}' = -gh'' = -\ddot{h}/H$$

also

$$\ddot{h} = gHh"$$

Das ist eine d'Alembert-Wellengleichung mit $c = \sqrt{gH}$. In einem Becken der Länge L ist die Perioden des Schwappens

$$T = \frac{2L}{c} = \frac{2L}{\sqrt{gH}}$$

Man hüte sich, mit dieser Periode am Becken zu wackeln.

Aufgabe 42 (Beschleunigungsmesser) *Eine Stahlkugel in einem horizontalen Glasrohr wird von 2 Spiralfedern normalerweise in die Rohrmitte gedrückt. Zeichnen und diskutieren Sie, wie das System funktionieren soll. Wie dimensionieren Sie Kugel und Federn sowie die Anzeigeskale? Füllen Sie das Rohr mit Wasser oder Glycerin oder dergleichen oder lassen Sie es leer?*

Lösung

Im Bezugssystem des Fahrzeugs, das mit a beschleunigt ist, lautet die Bewegungglg. der Kugel $m\ddot{x} = -ma - Dx - k\dot{x}$. Die Kugel soll durch ihren Ausschlag x die unregelm. Zeitfkt. $a(t)$ möglichst getreu darstellen. Bei längerer konstanter Beschleunigung a ist $x = -ma/D$. Das entspricht dem quasistatischen Plateau der Resonanzkurve. Da auch und erst recht solche Vorgänge aufgezeichnet werden sollen, gibt es keine andere Wahl des Messbereichs als $\omega \lesssim \omega_0$. Kurze Stöße von etwa $0,1s$ Dauer infolge Straßenunebenheiten brauchen nicht aufgezeichnet zu werden. Das Auge könnte ihrer Anzeige auch gar nicht folgen. $\omega_0$kann also in der Gegend von $10s^{-1}$ liegen. Für eine Stahlkugel von $1cm$ Durchmesser, also $4g$ Masse erfordert das eine Feder von etwas $0,4N/m$. Dämpfung auf den aperiodischen Grenzfall optimiert wieder Messbereich und Einstellzeit. Ein solches $k = 0,08Ns/m$

lässt sich als Stokes-Reibungsfaktor $k = 6\pi\eta r$ mit $\eta = 0,8Ns/m^2$realisieren. Das entspricht einem ziemlich dicken Maschinenöl. Seine Viskosität muss gut temperaturbeständig sein, sonst kann man aus dem Grenzfall geraten und damit für schnelle Vorgänge falsche Angaben erhalten, weil sich der Horizontalitätsbereich verengt. Der Ausschlag der Kugel ist $x \approx ma/D \approx 10^{-2}a$. Beschleunigungen von einigen Zehntel m/s^2 lassen sich also mit Hilfe eines Lupenglases noch gut und schnell ablesen.

Aufgabe 43 (Federpendel) *Eine Feder wird durch die Kraft $1N$ um $5cm$ ausgedehnt. Wie groß ist die Schwingungsperiode, wenn an der Feder eine Masse von 1kg hängt? Die Federmasse sei vernachlässigbar.*

Lösung

$F = Dx$ *mit* $F = 1N$ *und* $x = 0,05m \Rightarrow D = 20N/m. \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{m/D} = 1,4s$

Aufgabe 44 (Schwingungen) *Ein $10g$ schweres Teilchen führe eine harmonische Schwingung mit einer Amplitude von $2,0 \cdot 10^{-3}m$ und einer maximalen Beschleunigung vom Betrag $8,0 \cdot 10^3 m/s^2$ aus. Die Phasenkonstante sei $-pi/3$ rad.*

1. *Wie lautet die Gleichung für die Kraft auf das Teilchen als Funktion der Zeit?*
2. *Welche Periode hat die Schwingung?*
3. *Welche maximale Geschwindigkeit hat das Teilchen?*
4. *Wie groß ist die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators?*

Lösung

1. *Position* $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$
   Geschwindigkeit $v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$
   Beschleunigung $a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$
   Die Beschleungungsamplitude ist $a_m = \omega^2 x_m$. *Mit* $x_m = 0,002m$ *und* $a_m = 8000m/s^2$*ist* $\omega = 2000rad/s$
   Mit dem 2. Newton'schen Gesetz mit $m = 0,01kg$, *erhält man* $F = ma = -(80N)\cos(2000t - \pi/3)$ *wobei* t *in Sekunden angegeben wird.*
2. $T = 2\pi/\omega = 3,1 \cdot 10^{-3}s$
3. *Mit* $k = \omega^2 m = 40000N/m$ *führt die Energieerhaltung auf*
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 \Rightarrow v_m = x_m\sqrt{\frac{k}{m}} = 4,0m/s$$
4. *Die Gesamtenergie ist* $\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 = 0,080J$

Aufgabe 45 (Wellen) *Eine sinusförmige Welle breite sich mit einer Geschwindigkeit von $40cm/s$ entlang eines Seils aus. Die Auslenkung eines Seilelements bei $x = 10cm$ verhält sich als Funktion der Zeit wie $y = (5,0cm)\sin[1,0 - (4,0s^{-1})t]$. Die lineare Massendichte des Seils sei $4,0g/cm$. Wie groß sind*

1. *die Frequenz und*
2. *die Wellenlänge der Welle?*

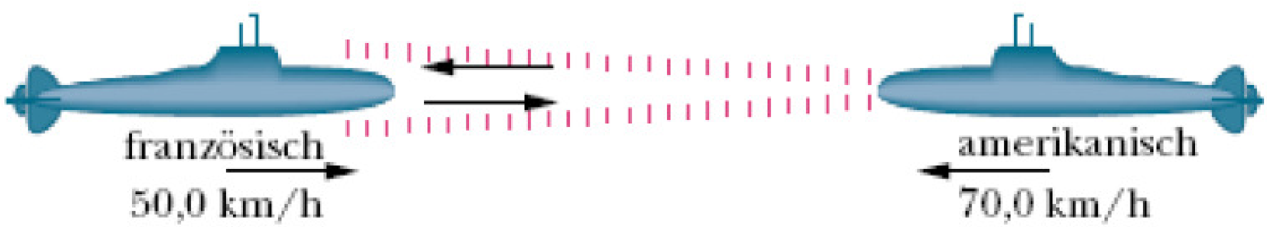
3. *Wie lautet die allgemeine Gleichung der transversalen Auslenkung als Funktion von Ort und Zeit?*
4. *Berechnen Sie die Spannung in dem Seil.*

Lösung

1. *Allgemeiner Ausdruck für die Seilwelle:*
$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \overset{x=10cm}{=} y_m \sin[k(10cm) - \omega t)]$$
Vergleich mit gegebenem Ausdruck erhalten wir $\omega = 4,0rad/s$ *oder* $f = 0,64Hz$.
2. *Da* $k(10cm) = 1.0$, *ist die Wellenzahl* $k = 0,10/cm$. *Als Folgerung ist* $\lambda = 2\pi/k = 63cm$
3. *Nach Einsetzen der Werte für* k *und* ω *in die allgemeine Formel für* $y(x,t)$ *(Einheiten* cm, s*) bekommen wir*
$$y(x,t) = 5,0 \sin(0,10x - 4,0t)$$
4. *Da die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle* $v = \omega/k = \sqrt{\sigma/\rho} = \sqrt{\tau/(A\rho)} = \sqrt{\tau/\mu}$ *ist, ist die Spannung* $\tau = \omega^2\mu/k^2 = (4,0s^{-1}s)^2\,(4,0g/cm)/(0,10cm^{-1})^2 = 0,064N$

Aufgabe 46 (Wellen, Dopplereffekt) *Ein französisches und ein amerikanisches Unterseeboot bewegen sich während eines Manövers in ruhigem Wasser im Nord Atlantik aufeinander zu (siehe Abbildung). Das französische U-Boot bewegt sich mit* $50km/h$ *und das amerikanische mit* $70km/h$. *Das französische U-Boot sendet Sonarsignale (Schallwellen in Wasser) bei* $1000Hz$ *aus. Sonarwellen breiten sich mit* $5470km/h$ *aus.*

1. *Welche Signalfrequenz registriert das amerikanische U-Boot ?*
2. *Welche Frequenz registriert das französische U-Boot von den an dem amerikanischen U-Boot reflektierten Wellen?*



Lösung

Wir bezeichnend die Geschwindigkeit des französischen U-Boots mit u_1 *und die des amerikanischen mit* u_2.

1. *Die durch das amerik. U-Boot detektierte Frequenz ist*
$$f_1' = f_1[(v + u_2)/(v - u_1)] = (1000Hz)[(5470 + 70)/(5470 - 50)] = 1,02 \cdot 10^3 Hz$$
2. *Wenn das französische U-Boot stationär wäre, würde die Frequenz der reflektierten Welle* $f_r = f_1[(v + u_2)/(v - u_2)]$ *sein. Da das französische U-Boot in Richtung des reflektierten Signals*

mit der Geschwindigkeit u_1 bewegt, ist dann

$$f_r' = f_r \frac{v+u_1}{v} = f_1 \frac{(v+u_1)(v+u_2)}{v(v-u_2)} = (1000Hz)\frac{(5470+50)(5470+70)}{(5470)(5470-70)} = 1,04 \cdot 10^3 Hz$$

Achtung: Hier muss wahrscheinlich noch das v im Nenner durch $(v-u_1)$ ersetzt werden, da sonst die Frequenzänderung durch die Bewegung beim Senden fehlt.

Aufgabe 47 (Überlagerung von Wellen) *Zwei ebene Schallwellen $\xi_1 = A\cos(800t - 2z)$ und $\xi_2 = A\cos(630t - 1,5z)$ werden überlagert. Wie sieht die Überlagerung aus und wie groß ist ihre Gruppengeschwindigkeit im Vergleich zu den Phasengeschwindigkeiten der beiden Einzelwellen?*

Lösung

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)\cos(\omega_m t - k_m z) = 2A\cos(85t - 0,25z)\cos(715t - 1,75z)$$

$$v_{1Ph} = \frac{\omega_1}{k_1} = 400m/s$$

$$v_{2Ph} = \frac{\omega_2}{k_2} = 420m/s$$

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{170}{0,5}m/s = 340m/s$$

Aufgabe 48 (Schwingungen im U-Rohr) *In einem U-Rohr mit senkrechten Schenkeln von $2cm$ Innendurchmesser steht eine Wassersäule der Masse $0,5kg$. Drückt man das Wasser in einem Schenkel um $\Delta z = 10cm$ kurzzeitig herab, so beginnt die Säule zu schwingen. Wie groß ist die Schwingungsdauer? Wie groß sind maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung? Wie lautet die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Reibung?*

Lösung

1. *Oberfläche der ruhenden Flüssigkeit sei $z_0 = 0$. Rücktreibende Kraft für eine reibungsfreie Flüssigkeit bei Auslenkung um z ist dann*

   $$F = -2z\rho g A = m\ddot{z} \quad \Rightarrow z(t) = \Delta z \sin\left(\sqrt{\frac{2\rho g A}{m}}t\right) = \Delta z\sin(\omega t)$$

   $$\Rightarrow \omega = 3,5s^{-1} \Rightarrow T = 1,8s$$

   Geschwindigkeit $v = \dot{z} = \omega\Delta z\cos(\omega t) \Rightarrow v_{max} = \omega\Delta z = 0,35m/s$
   Beschleunigung: $a = -\omega^2\Delta z\sin(\omega t) \Rightarrow a_{max} = 1,23m/s^2$.

2. *Nach Hagen-Poisseuille gilt für das Geschwindigkeitsprofil:*

   $$u(r) = \frac{\Delta p}{4\pi\eta L}(R^2 - r^2)$$

   Definiert man eine über die Querschnittsfläche πR^2 gemittelte Geschwindigkeit

   $$\overline{u} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u(r)2\pi r dr$$

so ist die Reibungskraft der Flüssigkeitssäule der Länge L gegeben durch:

$$F_R = 8\pi\eta L\overline{u}$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{z} - b\dot{z} - 2\rho g\pi R^2 z = 0$$

mit $\dot{z} = \overline{u}$ und $b = 8\pi\eta L$.

Aufgabe 49 (Dopplereffekt) *Eine Dampflokomotive besitzt eine beidseitig offene Dampfpfeife von $l = 12,5cm$ Länge, die mit Wasserdampf angeblasen wird. In der Dampfpfeife bildet sich eine Stehende Welle aus, die an beiden Enden jeweils einen Wellenbauch aufweist, da die Pfeife dort offen ist. Damit besitzt die Grundschwingung der Frequenz $f_0$der stehenden Welle in der Pfeife genau eine halbe Wellenlänge]. Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist $v_L = 330m/s$.*

1. *Berechnen Sie die Grundfrequenz der Dampfpfeife beim Anblasen mit Wasserdampf. (Hinweis: Schallgeschwindigkeit in Wasserdampf $v_D = 500m/s$)*
2. *Die Lokomotive fährt mit $v = 108km/h$ auf einen Tunnel in einem Berg zu und gibt dabei ein kontinuierliches Signal aus ihrer Dampfpfeife ab. In einem Waggon hinter der Lokomotive hört man dieses Signal direkt und vom Berg reflektiert. Berechnen Sie das Verhältnis der gehörten Frequenzen.*

Lösung

1. *In der Dampfpfeife bildet sich eine Stehende Welle aus, die an beiden Enden jeweils einen Wellenbauch aufweist, da die Pfeife dort offen ist. Damit besitzt die Grundschwingung der Frequenz $f_0$der stehenden Welle in der Pfeife genau eine halbe Wellenlänge, also*

$$l = \frac{1}{2}\lambda = \frac{v_D}{2f_0} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{v_D}{2l} = 2000Hz$$

2. *Die Frequenz, die man direkt im Zug hört ist $f_d = f_Q = 2000Hz$, weil Quelle und Beobachter die gleiche Geschwindigkeit und gleiche Richtung der Bewegung haben. Für die am Berg reflektierte Schallwelle findet man die Frequenz in zwei Schritten*

   - *Frequenz der Welle beim Auftreffen am Berg ($v_B = 0$):*

$$f_b = f_Q \frac{v_{Ph}}{v_{Ph} - v_Q}$$

   - *Frequenz der reflektierten Welle beim Beobachter im Zug ($v_Q = 0$):*

$$f_r = f_b \frac{v_{Ph} + v_R}{v_{Ph}}$$

Beide Effekte ergeben zusammen

$$f_r = f_Q \frac{v_L + v_B}{v_L} \frac{v_L}{v_L - v_Q} = f_Q \frac{v_L + v_B}{v_L - v_Q}$$

wobei $v_B = v_Q = 108km/h = 30m/s$ und $v_{Ph} = v_L = 330m/s$ sind. Daraus folgt für das

Verhältnis:

$$\frac{f_r}{f_d} = \frac{v_L + v_B}{v_L - v_Q} = \frac{330 + 30}{330 - 30} = 1,2$$

Aufgabe 50 (Musikantenstreit) *Bei einem Festumzug herrscht Chaos und die Wagen (davon zwei mit Musikern) fahren durcheinander. Wir betrachten nur die beiden Musikwagen, die sich aufeinander zubewegen. Wagen 1 fährt mit Geschwindigkeit $30km/h$ und Wagen zwei fährt auf ihn zu mit $15km/h$. Ein Geiger auf Wagen 1 stimmt gerade sein Instrument und spielt deswegen den Kammerton a (440 Hz). Seine Kollegen auf Wagen 2 behaupten, dass die Geige nicht gut gestimmt ist, seine Kollegen auf Wagen 1 sagen, dass er genau $440Hz$ gespielt hat.*

1. *Wer hat Recht? Welche Frequenzabweichung hören die Musiker auf Wagen 2?*
2. *Die beiden Wagen fahren weiter aufeinander zu und bleiben dann nebeneinander stehen. Die beiden Gruppen streiten, wer Recht hat. Deswegen spielt der Geiger nochmals den gleichen Ton. In diesem Moment kommt eine Windböe (Rückenwind für Wagen 1) der Geschwindigkeit $v = 10m/s$ auf und bläst den Musikern in Wagen 2 ins Gesicht. Was sagen die beiden Parteien jetzt? Kann der Streit beigelegt werden?*

Lösung

1. *Sei $v_q = 30km/h = 8,33m/s$, $v_e = 15km/h = 4,17m/s$, $v_s = 340m/s$ und $f = 440Hz$. Mit der Formel für sich aufeinander zubewegende Quellen und Beobachter folgt*

$$f' = \frac{1 + v_e/v_s}{1 - v_q/v_s} = \frac{v_s + v_e}{v_s - v_q} f = 457Hz$$

2. *Das Medium (Luft) bewegt sich mit $10m/s$ auf Wagen 2 zu, d.h. die effektive Schallgeschwindigkeit ist $v_{eff} = 340m/s + 10m/s = 350m/s$. Ersetzt man in der oberen Formel v_s durch v_{eff}, so erhält man*

$$f' = \frac{1 + v_e/v_{eff}}{1 - v_q/v_{eff}} = \frac{v_{eff} + v_e}{v_{eff} - v_q} f$$

Die beiden Wagen stehen, also ist $v_q = v_e = 0$. Daraus folgt für die Frequenz $f' = f$. Die beiden Parteien einigen sich also darauf, dass das Instrument richtig gestimmt ist. Die Frequenz wird durch das bewegende Medium nicht verändert.

Aufgabe 51 (Schallwellen) *Die Verschiebung eines Punktes aus der Ruhelage in einer ebenen stehenden Schallwelle lässt sich beschreiben durch $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx) \exp(-i\omega t)$, wobei k, x, ω und t die übliche Bedeutung haben. Betrachten Sie eine solche Schallwelle der Frequenz $f = 1kHz$ in Luft der Temperatur $T = 300K$. Nehmen Sie an, die Druckänderung der Schallwelle betrage $p_0 = 10^{-6}bar$(im Vergleich zum Normaldruck $p_a = 1bar$). Berechnen Sie näherungsweise die Amplitude der Verschiebung der Luftteilchen ξ_0, die mit dieser Schallwelle verbunden ist. (Hinweis: Stellen Sie zunächst den Zusammenhang von ξ_0 und p_0 auf. Nehmen Sie im weiteren an, dass Gas verhalte sich gemäß dem idealen Gasgesetz. Die Molmasse von Luft sei $M = 29 \cdot 10^{-3}kg/mol$ und die Schallgeschwindigkeit $v = 340m/s$).*

Lösung

Wir betrachten longitudinale Wellen (Schwerwellen in Luft sind nicht möglich). Die Verschiebung der Luftteilchen ist gegeben durch:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx)\exp(-i\omega t)$$

mit $k = 2\pi/l$, l *Abstand über den stehenden Wellen und* n *die Harmonische der Wellen. Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch*

$$v = \sqrt{\gamma\frac{K}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{v^2\rho}{\gamma}$$

Der Kompressionsmodul K *ist durch*

$$K = -V\frac{\Delta p}{\Delta V}$$

gegeben, wobei Δp *die durch die Volumenänderung* ΔV *erzwungene Druckänderung ist. Für ein ideales Gas ist*

$$K = p_a \qquad v = \sqrt{\frac{p_a}{\rho}}$$

Betrachte einen Zylinder mit Querschnittsfläche A *und Länge* Δx*, dann ist*

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta\xi}{A\Delta x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}$$

Somit erhalten wir

$$\Delta p = -K\frac{\partial\xi}{\partial x} = -Kk\xi_0\cos(kx)e^{-i\omega t} = -ap_0\cos(kx)e^{-i\omega t}$$

Dabei ist

$$ap_0 = Kk\xi_0 = \rho\frac{v^2}{\gamma}k\xi_0$$

die Amplitude der Druckänderung. Für $n = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2l,\ k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/v$*. Daraus folgt*

$$\xi_0 = \frac{\Delta p_0}{2\pi\rho v f} = \frac{v\Delta p_0}{2\pi p_a f}$$

mit $p_aV = (m/M)RT$ *ist dann*

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p_aM}{RT}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\xi_0 = 4\cdot 10^{-8}m$$

Aufgabe 52 (Nichtharmonische Schwingung) *Ein Klotz der Masse* $2kg$ *befindet sich zwischen zwei Federn mit einer Federkonstante von je* $D_0 = 100N/m$*. Er kann auf seiner Unterlage hin und hergleiten. Die Reibungskraft ist* $|F_R| = f\cdot$*Normalkraft. Die Gleitreibungszahl sei* $f_1 = 0,3$ *und die Haftreibungszahl* $f_0 = 0,9$

1. *Nach welcher Gesetzmäßigkeit nehmen die Amplituden ab? (Hinweis: Betrachten Sie die Energieverhältnisse an aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten* x_n*und* x_{n+1} *auf entgegengesetzten Seiten der Nulllage).*
2. *An welcher Stelle kommt der Klotz zur Ruhe, wenn er bei einer Auslenkung von* $22cm$ *freigege-*

ben wird.

Lösung

Die Ruhelage sei $x = 0$. Wird er Klotz bis zur Auslenkung $x_0 > 0$ gebracht, so ist seine Potentielle Energie

$$E_{p0} = \int_0^{x_0} 2D_0 x dx = D_0 x_0^2$$

1. *Nach dem Loslassen gleitet er bis zum Umkehrpunkt $x_1$und verliert dabei die Reibungsenergie*

$$E_R = f_1 mg(x_0 - x_1) \qquad \textit{mit} \quad x_1 < 0$$

$$\Rightarrow \ D_0 x_1^2 = D_0 x_0^2 - f_1 mg(x_0 - x_1) \qquad \Rightarrow \ x_1 = \frac{f_1 mg}{D_0} - x_0 < 0$$

   Für die Beträge der Auslenkungen gilt:

$$|x_1| = |x_0| - f_1 mg/D_0$$

   und allgemein:

$$|x_n| = |x_{n-1}| - f_1 mg/D_0 = |x_{n-1}| - 0,059m$$
$$|x_n| = |x_0| - n f_1 mg/D_0 = |x_0| - n0,059m$$

   Die Abstände $|x_n|$ der Umkehrpunkte nehmen linear *mit n ab! Die Bewegung des Klotzes ist eine gedämpfte, aber* nichtharmonische *Schwingung.*

2. *Der Klotz bleibt im n-ten Umkehrpunkt stehen, wenn dort die Rückstellkraft kleiner ist als die Haftreibungskraft.*

$$\Rightarrow \ 2D_0|x_n| < f_0 mg \qquad \Rightarrow \ n > \frac{D_0 x_0}{f_1 mg} - \frac{f_0}{2f_1} = 2,3$$

   D.h. der Klotz bleibt spätestens beim dritten Umkehrpunkt stecken, wenn er ihn überhaupt erreicht. Um dies zu Überprüfen, bestimmen wir seine Anfangsenergie am zweiten Umkehrpunkt:

$$E_p = D_0 x_2^2 = D_0(x_0 - 2f_1 mg/D_0)^2$$

   die größer sein muss als die Reibungsenergie $f_1 mg|x_3 - x_2|$, wenn x_3 erreicht werden soll. Einsetzen der Zahlenwerte zeigt, dass $E_p(x_1) = 1,05nm$, $f_1 mg|x_3 - x_2| = 0,346Nm$ ist. D.h. x_3 wird erreicht und der Klotz bleibt bei x_3 im Umkehrpunkt stecken.

Aufgabe 53 (Gedämpfte Schwingung) *Eine Kugel mit der Masse $m = 3$ befinde sich in einem Flüssigkeitsbad. Die Kugel ist an einer Feder befestigt, die ihrerseits an einer starren Wand angebracht ist. Die Feder habe eine Federkonstante von $D = 120N/m$. Die Kugel schwinge in dieser Anordnung. Aufgrund von Reibung nimmt die Amplitude bei 2 aufeinanderfolgenden Schwingungen um die Hälfte ab. Schwerkraft und Auftriebskraft werden nicht betrachtet.*

1. *Geben Sie die wirkenden Kräfte an und stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft auf!*
2. *Berechnen Sie die numerischen Werte der Schwingungsfrequenzen f_0 von ungedämpftem und f von gedämpftem System!*
3. *Berechnen Sie den Radius der Kugel, falls die Dämpfungskonstante der Schwingung $\gamma = 1,11s^{-1}$ ist und die Viskosität der Flüssigkeit $\eta = 4kg/(ms)$ beträgt. Die Reibungskraft F_R*

der Kugel im FLüssigkeitsbad ist bei Geschwindigkeit v durch $6\pi\eta Rv$ gegeben.

Lösung

1. *Wie in der Vorlesung beschrieben erhält man*

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

als Bewegunggleichung wobei die Reibungskraft $F_R = -\beta\dot{x}$, Rückstellkraft $F_D = -Dx$, $2\gamma = \beta/m$ und $\omega_0^2 = D/m$ sind.

2. *Es handelt sich um eine gedämpfte freie Schwingung, deren allgemeine reelle Lösung*

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

ist, wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Nach einer Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ soll die Amplitude auf die Hälfte abgesunken sein, d.h.

$$x(t+T) = Ae^{-\gamma(t+T)}\cos(\omega(t+T) + \varphi_0) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Unter Ausnutzung der Periodizität des Cosinus erhält man nach Auflösen

$$\gamma T = \ln 2$$

Die Frequenz f_0 folgt aus $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{D/m}$:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \approx 1,0066Hz$$

Die Frequenz f folgt aus

$$2\pi = \omega T = \sqrt{\omega_0^2 T^2 - \gamma^2 T^2} = \sqrt{\omega_0^2 T^2 - \ln^2 2}$$

$$\Rightarrow\ T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + \ln^2 2}{4\pi^2 f_0^2}} \approx 0,9995s \qquad \Rightarrow\ f = \frac{1}{T} \approx 1,0005Hz$$

3. *Mit $\gamma = 1,11s^{-1}$ und $\eta = 4kg/(ms)$:*

$$2\gamma = \frac{6\pi\eta R}{m} \qquad \Rightarrow\ R = \frac{\gamma m}{3\pi\eta} \approx 0,0883m$$

Aufgabe 54 (Messgerät) *Das drehbare Anzeigesystem habe das Trägheitsmoment J und die Rückstellgröße $D*$. die Dämpfungsgröße k lässt sich variieren. Wie muss man sie wählen, damit die Annäherung an den Endausschlag bei einer Messung möglichst schnell erfolgt? Diskutieren Sie auch die Fälle $D*$, k fest, J variabel und J, k fest und $D*$ variabel. Sind alle drei Fälle wichtig?*

Lösung

Die Schwingungsgleichung lautet

$$J\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + D\varphi = 0$$

Wurzeln des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = \frac{k}{2J}\left(\pm\sqrt{1-\frac{4JD}{k^2}}-1\right)$$

- *Bei $k < 2\sqrt{JD}$ (Schwingfall) ist der Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{k}{2J} < \sqrt{D/J}$*
- *Bei $k = 2\sqrt{JD}$ (aperiodischer Grenzfall) ist $\delta = \frac{k}{2J} = \sqrt{D/J}$*
- *Bei $k > 2\sqrt{JD}$ (Kriechfall) ist die vollständige Lösung*

$$\varphi = Ae^{-\frac{k}{2J}\left(1-\sqrt{1-\frac{4JD}{k^2}}\right)} + Be^{-\frac{k}{2J}\left(1+\sqrt{1-\frac{4JD}{k^2}}\right)}$$

Der zweite Term ist stärker gedämpft und effektiv ist $\delta = -\frac{k}{2J}\left(1-\sqrt{1-\frac{4JD}{k^2}}\right)$ maßgebend. Im extremen Kriechfall nimmt er den Wert $\delta \approx D/k$ an.

Bei festem J und D als Funktion von k aufgetragen, ist δ am größten im aperiodischen Grenzfall. Bei festem k und J bleibe man im extremen Schwingfall ($D \gg 1/4k^2/J$), damit δ möglichst groß, nämlich D/k wird (Beim aperiodischen Grenzfall ist mit k und J auch D festgelegt). Bei festem k und D schießlich muss J möglichst klein sein (extremer Kriechfall), damit δ maximal, nämlich $\frac{1}{2}k/J$ wird (da k und D fest sind wird beim senken von J automatisch der Kriechfall erreicht $k > 2\sqrt{JD}$). Man kann also daraus allein nicht einfach sagen, der Grenzfall sei für jedes Messsystem am günstigsten. Es kommt dazu die Bedingung der verzerrungsfreien Amplitudenwiedergabe über einen großen Frequenzbereich, die das quasistatische Plateau des Grenzfalls ebenfalls gut erfüllt, und ie Bedingung, dass die Empfindlichkeit der Anzeige, d.h. das Verhältnis des Ausschlags zur Amplitude des angreifenden Drehmoments nicht zu klein, d.h. D nicht zu groß sein soll.

Aufgabe 55 (Anfahren einer Maschine) *Beim Anfahren einer Maschine führt der Fußboden des Maschinengebäudes vertikale Schwingungen mit zunehmender Frequenz aus. Für ein Messgerät mit Masse $m = 100g$, das hohe Schwingungsfrequenzen nicht verträgt, beträgt die kritische Kreisfrequenz $\omega_k = 200s^{-1}$. Das Gerät ist federnd und gedämpft gelagert. Die Feder ist so ausgewählt, dass die Eigenkreisfrequenz ω_0 für Messgerät und Feder $\varepsilon = 10\%$ von ω_k beträgt.*

1. *Wie groß ist die Federkonstante k der Aufhängung des Messinstruments?*
2. *Welchen Wert muss die Abklingkonstante γ haben, damit die Schwingungsamplitude A_m des Messgerätes bei ω_0 gerade so groß wie die Amplitude ξ_m der Erregerschwingung ist?*
3. *Bei welcher Kreisfrequenz $\omega_{ext,M}$ ist das Amplitudenverhältnis A_m/ξ_m am größten, wenn die Abklingkonstante γ den oben berechneten Wert hat?*
4. *Welchen Wert hat A_m/ξ_m bei $\omega_{ext,M}$ und bei ω_k?*

Lösung

1. *Da das Messgerät die Frequenz ω_k nicht verträgt, wählt man die Federkonstante so, dass deren Eigenfrequenz ω_0 ganz verschieden ist von der kritischen Frequenz ω_k, laut Angabe also $\omega_0 = 0,1\omega_k$. Es folgt $k = m\omega_0^2 = 40N/m$.*
2. *Wahl der Dämpfungskonstante so, dass bei der Schwinung des Bodens $\xi(t) = \xi_m\cos(\omega_{ext}t)$ bei $\omega_{ext} = \omega_0$ die Amplitude A_m der Messgerätschwingung $x(t) = A_m\cos(\omega t + \varphi)$ gerade so groß ist wie die Bodenamplitude ξ_m. Die Schwingung des Bodens $\xi(t) = \xi_m\cos(\omega_{ext}t)$ führt zu einer*

Komprimierung und Dehnung der Feder und somit zu einer Kraft auf das Messgerät, welche gegeben ist durch

$$F(t) = k\xi(t)$$

Diese kann als äußere Antriebsfrequenz des Feder-Messgerät-Systems angesehen werden. Die Differentialgleichung des Feder-Messgerät-Systems ist dann gegeben durch

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = k\xi(t) = F_0 \cos(\omega_{ext}t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\gamma}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\xi(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_{ext}t)$$

Mit $\xi(t) = \xi_m \cos(\omega_{ext}t)$ *ist dann* $\omega_0^2\xi_m = F_0/m$. *Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist* $x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ *mit*

$$A_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{ext}^2}}$$

Daraus folgt

$$\frac{A_m}{\xi_m} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{ext}^2}}$$

Mit der Bedingung aus der Angabe:

$$\frac{A_m}{\xi_m}(\omega_{ext} = \omega_0) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} \overset{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_0}{2} = 10s^{-1}$$

3. *Bestimmung der Maximums des Ausdrucks*

$$\frac{A_m(\omega_{ext})}{\xi_m} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{ext}^2}}$$

ist aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion äquivalent zur Bestimmung des Minimums von

$$R(\omega_{ext}) = (\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{ext}^2$$

Mit

$$\left.\frac{dR}{d\omega_{ext}}\right|_{\omega_{ext}=\omega^*} = 0 \qquad \Rightarrow \omega^* = \frac{\omega_0}{2}$$

D.h. A_m *ist maximal bei dieser Frequenz und das Amplitudenverhältnis ist dann*

$$\frac{A_m(\omega^*)}{\xi_m} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2)^2 + 4\gamma^2\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2}} = 1,15$$

4. *Bei der gefährlichen Frequenz ist dann*

$$\frac{A_m(\omega_k)}{\xi_m} = 0,01$$

d.h. das Gerät wird geschont.