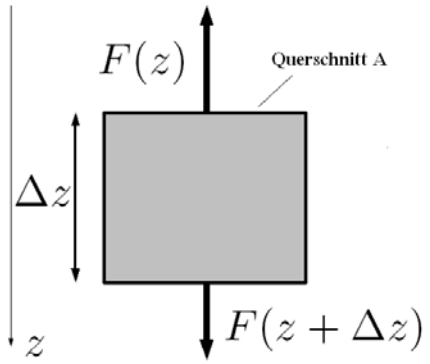
B.3 Lösungsskizzen der Übungsaufgaben zum Kapitel 3

Aufgabe 29 (Stahlseil) *An einem Stahlseil (Länge L_0, Querschnittsfläche A, Dichte ρ, Elastizitätsmodul E) hängt ein Körper der Masse m. Um welchen Betrag $\Delta l L$ ist das Seil gedehnt? Die Dehnung des Seils infolge seiner Eigenmasse ist zu berücksichtigen.*

Lösung:

Man betrachte ein kleines Drahtstück



Kräftegleichgewicht: $F(z) = F(z+\Delta z) + \rho g A \cdot \Delta z$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} + \rho g A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} + \rho g A = 0$$

mit $\rho A L_0 = m_D \Rightarrow \rho A = \frac{m_D}{L_0}$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} + \frac{m_D}{L_0} g = 0 \;\Rightarrow\; F(z) = -\frac{m_D}{L_0} gz + C$$

mit $F(0) = g(m_d + m) \stackrel{!}{=} C$

$$\Rightarrow F(z) = mg + m_D g \left(1 - \frac{z}{L_0}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma(z) = \frac{F(z)}{A} = \frac{\rho L_0}{m_D}\left[mg + m_D g\left(1 - \frac{z}{L_0}\right)\right] = \frac{\rho L_0 g m}{m_D} + \rho L_0 g \left(1 - \frac{z}{L_0}\right)$$

Elastizitätsgesetz: $\sigma = E\varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{\rho m g L_0}{m_D E} + \frac{\rho g}{E}(L_0 - z)$$

$$\Rightarrow u(z) = \int_0^z \varepsilon(z')dz' = \frac{\rho m g L_0}{m_D E} z + \frac{\rho g}{E}\left(L_0 z - \frac{z^2}{2}\right)$$

Gesamtdehnung des Drahtes ist gegeben durch die Verschiebung des unteren Punktes

$$u(L_0) = \Delta L = \frac{m\rho g}{m_D E} L_0^2 + \frac{\rho g}{2E} L_0^2 = \frac{\rho g L_0}{E} \left(\frac{m}{m_D} + \frac{1}{2} \right)$$

Aufgabe 30 (Belastung einer Staumauer) *Mit welcher Kraft drückt Wasser in horizontaler Richtung gegen eine Staumauer, wenn die Wasserstandshöhe h über die gesamte Länge l konstant ist? $(h = 6m,\ l = 30m)$*

Lösung:

Die Kraft des Wassers in horizontaler Richtung gegen die Staumauer ist von Höhe z abhängig:

$$dF_w = p(z)dA$$

Dabei ist

$$p(z) = \rho_w g(h - z)$$

der Schweredruck in der Tiefe $(h - z)$ unter dem Wasserspiegel. Mit $dA = ldz$ folgt weiter:

$$dF_w = \rho_w g(h - z)ldz$$

Die auf die gesamte Mauer wirkende Kraft des Wassers in horizontaler Richtung erhält man durch Integration:

$$F_w = \int_0^h \rho_w gl(h - z)dz = \rho_w gl \left[h_z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{\rho_w}{2} glh^2 = 5,3MN$$

Aufgabe 31 (Venturi-Düse) *Durch eine Rohrleitung mit der Querschnittsfläche A_1 strömt Luft (Dichte ρ_1) mit der Stromstärke I. In der Rohrleitung befindet sich eine Verengung mit der Querschnittsfläche A_2 (Venturi-Rohr). $(A_1 = 100cm^2;\ A_2 = 20cm^2;\ I = 2,0\frac{m^3}{min};\ \rho_L = 1,3\frac{kg}{m})$*

1. *Mit welcher Geschwindigkeit v_1 strömt die Luft durch das Rohr?*
2. *Welche Höhendifferenz Δh zeigt der Wasserspiegel des angeschlossenen Manometers an?*

Lösung:

1. *Die Geschwindigkeit v_1 ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:*

$$v_1 = \frac{I}{A_1} = 3,3\frac{m}{s}$$

2. *Einen Ansatz für die Höhendifferenz Δh erhält man aus der Gleichung*

$$\Delta p = \rho_w g \Delta h \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h = \frac{\Delta h}{\rho_w g} \quad (1)$$

Die Bernoulli-Gleichung liefert eine Formel für die Druckdifferenz Δp:

$$p_1 + \frac{\rho_L}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho_L}{2} v_2^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho_L}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (2)$$

Die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 werden mithilfe der Kontinuitätsgleichung bestimmt:

$$v_1 = \frac{I}{A_1} \;\; und \;\; v_2 = \frac{I}{A_2}$$

Setzt man diese beiden Gleichungen in (2) ein, so erhält man

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho_L I^2}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

oder

$$\Delta p = \frac{\rho_L I^2}{2A_1^2 A_2^2}\left(A_1^2 - A_2^2\right) \quad (3)$$

(3) in (1) ergibt die gesuchte Höhendifferenz Δh:

$$\Delta h = \frac{\rho_L I^2 \left(A_1^2 - A_2^2\right)}{2\rho_w g A_1^2 A_2^2}$$

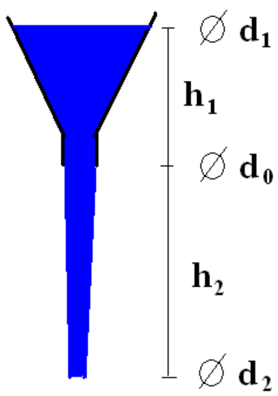
Mit $\rho_w = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ und den gegebenen Größen findet man

$$\Delta h = 1,8cm$$

Aufgabe 32 (Trichter) *In einem Trichter wird die Höhe $h_1 = 11,5cm$ einer Flüssigkeit oberhalb der Trichteröffnung durch vorsichtiges Nachgießen konstant gehalten. Die untere Öffnung hat den Durchmesser $d_0 = 6,0mm$, der klein gegenüber dem Durchmesser d_1 in der Höhe des Flüssigkeitsspiegels ist. (Terme der Ordnung $(d_0/d_1)^2$ können vernachlässigt werden.)*

1. *Mit welcher Geschwindigkeit strömt die Flüssigkeit aus dem Trichter?*
2. *Welche Zeit ist erforderlich, um eine $1,0l$-Flasche mit Hilfe des Trichters zu füllen? Die Flasche befindet sich dabei unmittelbar unter dem Trichter.*
3. *Welchen Durchmesser d2 hat der Flüssigkeitsstrahl in der Tiefe $h_2 = -24,0cm$ unterhalb der Trichteröffnung? Nehmen Sie an die Strömung sei reibungsfrei und laminar.*

Lösung



1. *Gesucht: Aussströmungsgeschwindigkeit*
   Bernoulli-Gleichung:
   $$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$$
   Aus der Kontinuitätgsgleichung $v_1 A_1 = v_0 A_0$ *folgt*
   $$v_1 = v_0 \frac{A_0}{A_1} = v_0 \frac{d_0^2}{d_1^2}$$
   da die Bedingung (laut Angabe) $v_1 = 0$ *gilt, folgt dann:*
   $$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \qquad \Rightarrow\ v_0 = \sqrt{2gh_1} = 1,5\frac{m}{s}$$
2. *Gesucht: Fülldauer für* $1l$*-Flasche:*
   Aus der Kontinuitätsgleichung (V*=Volumen)*
   $$\frac{V}{t} = A_0 v_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 v_0$$
   dann ist
   $$t = \frac{V}{A_0 v_0} = \frac{4V}{\pi d_0^2 \sqrt{2gh_1}} = 23,5s$$
3. *Gesucht: Durchmesser weit unterhalb des Trichters*
   Bernoulli-Gleichung:
   $$p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \rho g h_1$$
   mit $p_2 = p_1$ *folgt*
   $$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$
   Die Kontinuitätsgleichung liefert:
   $$A_0 v_0 = A_2 v_2 \qquad \Rightarrow\ \frac{\pi}{4} d_0^2 v_0 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2$$
   Daraus folgt:
   $$d_2 = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{v_2}} = d_0 \sqrt[4]{\frac{h_1}{h_1 - h_2}} = 4,5mm$$

Aufgabe 33 (Regentropfen) *Regentropfen bilden sich durch Koaleszenz von kleineren Tropfen in einer Wolke. Die treibende Kraft hierfür ist die Veränderung der Oberflächenenergie* E*.*

1. *Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Oberflächenenergie eines kugelförmigen Tropfens unter Vernachlässigung der Schwerkraft her.*
2. *In welchem Verhältnis "andert sich die Oberflächenenergie durch Verschmelzung zweier identischer Tropfen zu einem einzelnen?*
3. *Wird hierbei Energie freigesetzt oder aufgenommen?*

Lösung

1. *Die Oberflächenspannung mit der Einheit* N/m *ist eine spezifische Oberflächenenergie. Also ist die Oberflächenspannung einer Kugel gegeben durch:*
   $$E = \gamma A = 4\pi r^2 \gamma$$

2. *Die Oberflächenenergie eines Tropfens mit Radius r_0 und Volumen V_0 ist*

$$E_0 = 4\pi r_0^2 \gamma$$

nach dem Zusammenbringen von 2 Tropfen ist der Radius r gegeben durch

$$\frac{V}{2V_0} = \frac{r^3}{2r_0^3} \stackrel{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow r = r_0 \sqrt[3]{2}$$

Somit ist das Verhältnis der Oberflächenenergien des verschmolzenen Tropfens zur gesamten Oberflächenenergie von zwei einzelnen Tropfen gegeben durch:

$$\frac{E}{2E_0} = \frac{r^2}{2r_0^2} = \frac{2^{2/3}}{2} = 79\%$$

3. *Energie wird frei.*

Aufgabe 34 (Katapult) *Ein menschliches Haar habe einen Elastizitätsmodul $E = 5 \cdot 10^8 Nm^{-2}$. Nehmen Sie an, dass sich das Haar elastisch verhält bis es für Dehnungen größer als 10% beschädigt wird.*

1. *Berechnen Sie das Volumen an Haar, dass Archimedes 250 B.C. für ein Katapult benötigte, um einen Fels von $50kg$ auf eine Geschwindigkeit von $20m/s$ zu beschleunigen.*
2. *Wie weit fliegt dieser Fels unter idealen Bedingungen maximal?*

Lösung

1. *Hooksches Gesetz:*

$$\sigma = E\varepsilon \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow F = \underbrace{\frac{EA}{l}}_{k} \underbrace{\Delta l}_{x}$$

Energieerhaltung:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = E_{Feder} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{EA}{l}}_{k}\left(\underbrace{\Delta l}_{x}\right)^2 = \frac{1}{2}E\underbrace{Al}_{V}\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\varepsilon^2$$

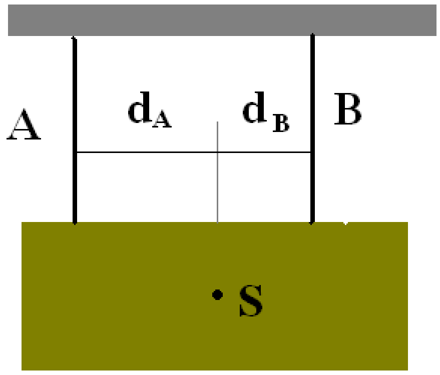
dann ist das Volumen gegeben durch

$$V = \frac{mv^2}{E}\left(\frac{l}{\Delta l}\right)^2 = 4 \cdot 10^{-3} m^3$$

2. *Die maximale Wurfweite ist gegeben durch*

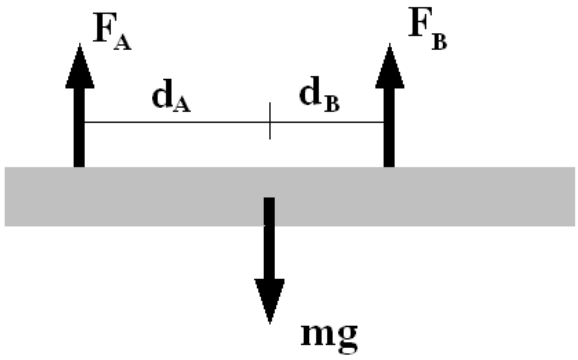
$$x_{max} = \frac{v^2}{g} = 40,77m$$

Aufgabe 35 (Hängender Baumstamm) *Ein $m = 103kg$ schwerer, gleichförmiger Baumstamm hängt an zwei Stahldrähten A und B vom Radius $1,20mm$. Der Elastizitätsmodul von Stahl ist $E = 200 \cdot 10^9 N/m^2$. Anfänglich hatte Draht A eine Länge von $L_A = 2,50m$ und war um $l = 2,00mm$ kürzer als Draht B. Der Baumstamm hängt nun horizontal.*



1. *Wie groß sind die Beträge der Kräfte F_A und F_B auf den Baumstamm von Draht A und Draht B?*
2. *Wie groß ist das Verhältnis d_A/d_B?*

Lösung



1. *Aus dem Kräftegleichgewicht von mg, F_A und F_B erhält man*

$$F_A + F_B - mg = 0 \qquad (1)$$

Sei A die Querschnittsfläche. Das Elastizitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$ liefert

$$\Delta L_{A,B} = \frac{F_{A,B} L_{A,B}}{AE} \qquad (2)$$

Da nun die Drähte gleich lang sind, gilt

$$\Delta L_A = \Delta L_B + l \qquad (3)$$

(2) *in* (3) *eingesetzt liefert*

$$\frac{F_A L_A}{AE} = \frac{F_B L_B}{AE} + l \qquad (4)$$

Nach Lösen des Gleichungssystems mit den Gleichungen (4) und (1) nach F_A und F_B erhalten wir:

$$F_A = \frac{mgL_B + AEl}{L_A + L_B} = 866N$$

$$F_B = mg - F_A = 143N$$

2. *Im Gleichgewicht muss das gesamte Drehmoment verschwinden. Betrachtet man die Drehmomente um den Schwerpunkt, so übt die Gewichtskraft kein Drehmoment bzgl. diesem Punkt aus. Das Momentengleichgewicht liefert:,*

$$F_A d_A - F_B d_B = 0 \Rightarrow \frac{d_A}{d_B} = \frac{F_B}{F_A} = 0,165$$

Aufgabe 36 (Auftrieb) *Ein homogener, massiver Körper schwimmt auf Wasser, wobei sich 80% seines Volumens unterhalb der Wasseroberfläche befinden. Wenn derselbe Körper auf einer anderen Flüssigkeit schwimmt, befinden sich 72% seines Volumens unterhalb der Oberfläche. Berechnen Sie die Dichte des Körpers und das relative Gewicht der Flüssigkeit*

Lösung:

Wir bezeichnen mit ρ die Dichte des Körpers, mit V sein Volumen und mit V' das Volumen des von ihm verdrängten Wassers, wenn er darin schwimmt. Dabei gleicht die Auftriebskraft im Wasser (mit der Dichte ρ_w) die Gewichtskraft mg des Körpers aus:

$$\rho_w V' g - mg = \rho_w V' g - \rho V g = 0 \quad (1)$$

Mit $\frac{V'}{V} = 0,8$ ergibt sich daraus die Dichte zu:

$$\rho = \rho_w \frac{V'}{V} = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,8 = 800 \frac{kg}{m^3}$$

Aus Gleichung (1) folgt damit $mg = 0,8 \rho_w V g$. Diese Gewichtskraft ist ebenso groß wie die Auftriebskraft in der anderen Flüssigkeit (mit der Dichte ρ_{fl}), wobei gilt:

$$mg = 0,72 \cdot \rho_{fl} V g$$

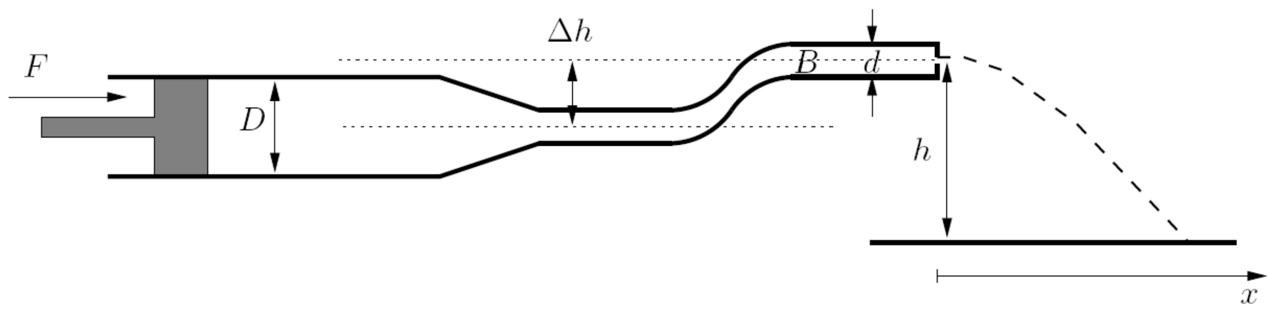
Gleichsetzen beider Ausdrücke für die Gewichtskraft ergibt

$$0,72 \rho_{fl} = 0,8 \rho_w$$

Daraus erhalten wir schließlich das relative Gewicht der Flüssigkeit:

$$\frac{\rho_{fl}}{\rho_w} = \frac{0,8}{0,72} = 1,11$$

Aufgabe 37 (Strömung) *Ein wassergefülltes zylindrisches Rohr mit Innendurchmesser D verengt sich in ein kleineres Rohr mit dem Durchmesser d. Von außen wirkt eine konstante Kraft F auf das reibungsfrei fließende Wasser ein. Das Wasser soll hierbei als inkompressibel angenommen werden. Das kleine Rohr besitzt einen Verschluss, in dessen Mitte ein kleines Loch gebohrt ist. Dieses Loch befindet sich in der Höhe h über dem Boden, der Höhenunterschied zwischen den beiden Rohrmitten ist h. (Siehe Abbildung)*



1. *Welcher Druck herrscht am Punkt B?*
2. *Wie weit spritzt der Wasserstrahl?*
3. *Nun wird das kleine Loch verschlossen. Welche Kraft wirkt auf die Wand am Ende des dünnen Rohres?*

Lösung

Zur Nomenklatur: Die Drücke auf der linken Seite haben den Index 1, die rechts (bei B) Index 2. Statische Drücke haben ein s*, also z.B.* p_{1s} *und dynamische ein* d*, also* p_{2d}*. Der Gesamtdruck* $p_{1s}+p_{1d}$ *wäre nur* p_1*.*

1. *Folgende Drücke findet man:*

$$P_{1S} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{D^2\pi}$$

$$p_{1d} = \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$p_{2d} = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Da das Volumen erhalten bleibt, gilt:

$$v_1\frac{D^2}{4}\pi = v_2\frac{d^2}{4}\pi \;\Rightarrow\; v_2 = v_1\frac{D^2}{d^2}$$

Somit ist

$$p_{2d} = \frac{1}{2}\rho v_1^2\frac{D^4}{d^4}$$

Nun muss nach Bernoulli gelten, dass $p_1 = p_2 + \rho gh$*, wobei die Höhendifferenz berücksichtigt wurde. D.h. es gilt (*p_0 *ist der Außen/Luftdruck):*

$$p_0 + \frac{4F}{D^2\pi} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{2s} + \frac{1}{2}\rho v_1^2\frac{D^4}{d^4} + \rho g\Delta h$$

$$p_0 + \frac{4F}{D^2\pi} - \rho g\Delta h = p_{2s} + \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

Nun kann man, da das Loch am Ende des Rohres sehr klein ist, sagen, dass $v_1 \approx 0$*. Dann ist der Druck* p_B *bei* B*:*

$$p_B = p_{2s} = p_0 + \frac{4F}{D^2\pi} - \rho g\Delta h$$

2. *Um zu berechnen, wie weit der Strahl spritzt, brauchen wir die Austrittsgeschwindigkeit. Dazu*

benutzen wir wieder Bernoulli:

$$p_B = p_{Strahl} = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_s^2$$

Wobei p_0 wieder der Aussendruck ist. Nach v_s aufgelöst ergibt sich:

$$v_s = \sqrt{\frac{2\left(\frac{4F}{D^2\pi} - \rho g \Delta h\right)}{\rho}}$$

Wir berechnen nun, wie lange ein Strahlelement braucht, um die Höhendifferenz h zu überwinden:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Damit spritzt der Wasserstrahl bisx_W:

$$x_W = v_s t = \sqrt{\frac{4h\left(\frac{4F}{D^2\pi} - \rho g \Delta h\right)}{\rho g}}$$

3. *Auf die Wand am Ende des dnnen Rohres wirkt:*

$$F = (p_B - p_0)A = \left(\frac{4F}{D^2\pi} - \rho g \Delta h\right)\frac{d^2}{4}\pi$$

Aufgabe 38 (Limonade) *Verwenden Sie das Stokes'sche Reibungsgesetz, um die Aufstiegsgeschwindigkeit einer Kohlenstoffdioxidblase von 1mm Durchmesser in einem Glas Limonade (Dichte $1,1 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$, Viskosität $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$) zu berechnen. Wie lange sollte der Aufstieg dann in einem typischen Limonadenglas dauern? Verträgt sich dieser Wert mit Ihren Alltagserfahrungen?*

Lösung:

Nach oben wirkt die Auftriebskraft F_A, und nach unten wirken die Reibungskraft F_R und die Gewichtskraft mg der Gasblase. Wir wählen als positive Richtung die nach oben.
Als Indices verwenden wir F für die verdrängte Flüssigkeit, L für die Limonade, sowie G für das Gas. Bis die Gasblase ihre Endgeschwindigkeit erreicht, wird sie mit der Beschleunigung a_y nach oben beschleunigt, und für die Kräfte gilt

$$F_A - m_G g - F_R = m a_y$$

Nach dem Erreichen der Endgeschwindigkeit ist die Beschleunigung null

$$F_A - m_G g - F_R = 0 \quad (1)$$

Gemäß dem Archimedischen Prinzip gilt für die Auftriebskraft auf die Gasblase:

$$|F_A| = |F_{G,F}| = m_{Fl} g = \rho_{Fl} V_{Fl} g = \rho_L V_{Blase} g$$

Mit der Masse $m_G = \rho_G V_{Blase}$ der Gasblase und der Endgeschwindigkeit v_e erhalten wir aus Gleichung (1):

$$\rho_L V_{Blase} g - \rho_G V_{Blase} g - 6\pi\eta r v_e = 0$$

Wir berücksichtigen, dass $\rho_L \gg \rho_G$ ist, und erhalten für die Endgeschwindigkeit:

$$v_e = \frac{V_{Blase} g(\rho_L - \rho_G)}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_L - \rho_G)}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2 g(\rho_L - \rho_G)}{9\eta} \approx \frac{2r^2 g\rho_L}{9\eta}$$

$$= \frac{2(0,5 \cdot 10^{-3} m)(9,81\frac{m}{s^2})}{9(1,8 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s)} \cdot 1,1 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} = 0,333\frac{m}{s}$$

Damit ist die Zeitspanne, die die Gasblase zur Oberfläche benötigt:

$$\Delta t \approx \frac{h}{v_e} \approx \frac{0,15m}{0,333\frac{m}{s}} = 0,45s$$

Diese Zeitspanne von rund einer halben Sekunde ist realistisch.

Aufgabe 39 (Viskositätsbestimmung) *Zur Messung der dynamischen Viskosität η von Öl mit der Dichte ρ_{oil} lässt man eine kleine Metallkugel mit der Masse m und dem Durchmesser d unter dem Einfluss der Schwerkraft in Öl sinken. Die Kugel durchfällt eine markierte Strecke s_1 in der Zeit t_1 mit konstanter Geschwindigkeit (Höppler-Viskosimeter). Wie groß ist die dynamische Viskosität η?*

($\rho_{oil} = 0,91\frac{kg}{dm^3}$; $m = 0,20g$; $d = 5,0mm$; $s_1 = 25cm$; $t_1 = 12s$)

Lösung

Da die Gewichtskraft F_G der Kugel größer als die Auftriebskraft F_A ist, sinkt die Kugel zunächst beschleunigt. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird die Reibungskraft $F_R = 6\pi\eta\frac{d}{2}v$ größer. Nach kurzer Zeit stellt sich Kräftegleichgewicht ein.

$$F_G = F_A + F_R$$

oder

$$mg = m_{oil} g + 3\pi\rho d v_1$$

Die Kugel bewegt sich nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 weiter. Dieses Kräftegleichgewicht stellt sich in Flüssigkeiten mit hoher Viskosität sehr schnell ein.

Mit $m_{oil} = \rho_{oil}\frac{\pi}{6}d^3$ und $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$ folgt weiter

$$mg = \rho_{oil} g\frac{\pi}{6}d^3 + 3\pi\eta d\frac{s_1}{t_1}$$

Durch Umformung erhält man die gesuchte Größe:

$$\eta = \left(\frac{m}{\pi d} - \frac{\rho_{oil} \cdot d^2}{6}\right)\frac{g t_1}{3 s_1} = 1,4 Pa \cdot s$$