B.2. Lösungsskizzen der Übungsaufgaben zum Kapitel 2

Aufgabe 13 (Karusell) *Ein Mann steht neben einem Karussell. Beschreiben sie seine Bewegung in einem im Karussell verankerten Bezugssystem, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Berechnen sie den zeitabhängigen Abstand des Mannes zu einem Punkt auf dem Karussell.*

Lösung

1. *Die Bewegunsgleichung im rotierenden System erhält man aus der Formel:*

$$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

   ausgerechnet in Komponenten ergibt das

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \omega^2 x' \\ \omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \omega \dot{y}' \\ -\omega \dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Da der zweite Term (die Koordinaten sind im rotierenden System) nicht allgemein gleich 0 ist, kann er nicht sofort weggelassen werden. Da die Lösung dadurch aufwendig wird, wird das Ergebnis gleich angegeben, es ist wie zu erwarten war eine Kreisbewegung. Die Anfangsbedingungen wurden so gewählt, dass das Ergebnis möglichst einfach ist:

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = -\omega a; \quad y(0) = 0 = \dot{y}(0)$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. *Die Person auf dem Karussell bewegt sich im rotierenden System nicht, ihre Position kann deshalb als $\vec{p} = (x_0, 0, 0)^T$ gewählt werden. Als Abstand ergibt sich dann:*

$$d = |\vec{p} - \vec{r}| = \sqrt{a^2 - 2ax_0 \cos(\omega t) + x_0^2}$$

Aufgabe 14 (Fliehkraftregler) *Zur Einstellung einer vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit einer rotierenden Achse kann ein Fliehkraftregler eingesetzt werden. Das Grundprinzip beruht auf einer Anordnung, bei der an einer vertikalen, rotierenden Achse am oberen Ende zwei Kugeln der Masse m an zwei Armen der Länge d aufgehängt sind. Die Kugeln werden an den Armen mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse gedreht, wobei sich ein zu ω gehörender Winkel β einstellt.*

1. *Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(\beta)$.*
2. *Für welche Mindestwinkelgeschwindigkeit kann der Fliehkraftregler mit $d = 8cm$ eingesetzt werden?*
3. *Skizzieren Sie β als Funktion von ω.*

Lösung

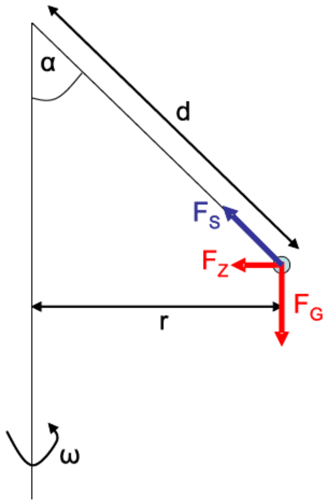
1. *F_Z ist die Zentripetalkraft:*

$$F_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 d \sin\beta$$

wobei $r = d \sin \beta$ ist. Jede Kugel zieht am Arm mit F_s, im Kräfteparallelogramm gilt:

$$\vec{F}_s = \vec{F}_Z + \vec{F}_G \Rightarrow \tan \beta = \frac{|\vec{F}_Z|}{|\vec{F}_G|} = \frac{m\omega^2 d \sin \beta}{mg} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

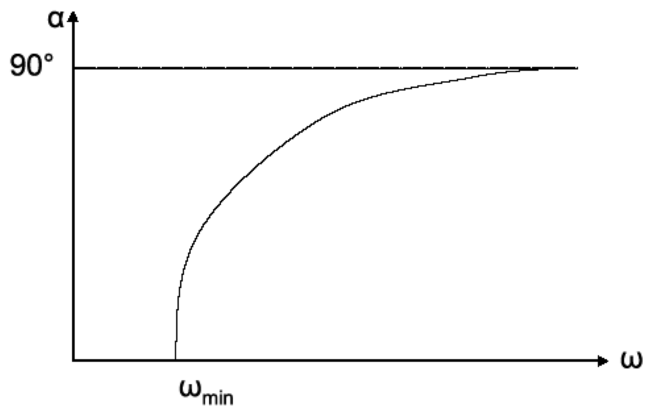
$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{d \cos \beta}}$$



2. *Für das kleinste ω gilt $\beta = 0$, $\cos \beta = 1$*

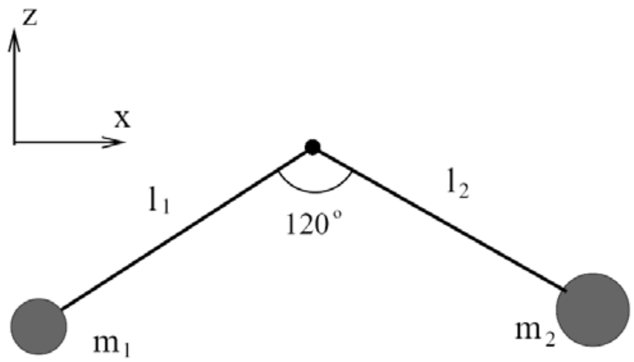
$$\rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{d}} = 11,074 s^{-1}$$

3. *Skizze*



Aufgabe 15 (Drehmoment) *Zwei Massen sind in der folgenden Anordnung befestigt (siehe Bild). Dabei ist $m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$, $l_1 = 0.5m$, $l_2 = 0.4m$, der Zwischenwinkel beträgt $120°$. Die Anordnung ist frei drehbar aufgehängt, die Bewegung erfolgt in der x-z-Ebene.*

1. *Was ist das Gesamtdrehmoment der Anordnung bzgl. des Aufhängepunktes (in Abhängigkeit vom Winkel zwischen l_2 und x-Achse)?*
2. *Nun seien die Massen in der Ruhelage. Welcher Winkel besteht zwischen l_2 und der x-Achse?*



Hinweis: Additionstheoreme:
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

Lösung

1. *Um das Drehmoment $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ der einzelnen Massen zu bestimmen, müssen erst einmal die Vektoren Festgelegt werden. Als Koordinatenursprung wird der Aufgängepunkt besttimmt. Dann können die wirkenden Kräfte geschrieben werden als*

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor der Massenmittelpunkte im Abhängigkeit von φ (Winkel zwischen x-Achse und l_2, negativ im mathematischen Sinn):

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} l_2 \cos\varphi \\ 0 \\ l_1 \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(180° - \alpha + \varphi) \\ 0 \\ l_1 \sin(180° - \alpha + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\varphi - \alpha) \\ 0 \\ l_1 \sin(\varphi - \alpha) \end{pmatrix}$$

Damit kann das Gesamtdrehmoment berechnet werden:

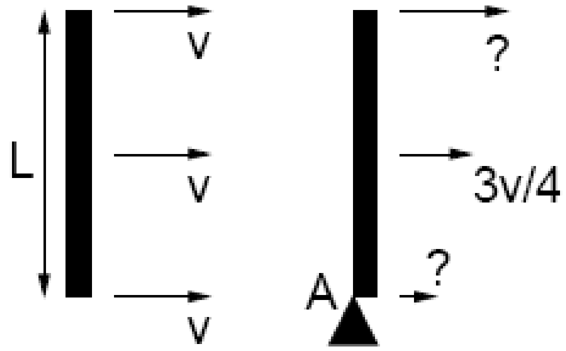
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \cos(\varphi - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g l_2 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \cos(\varphi - \alpha) + m_2 g l_2 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. *Ruhelage* $\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow m_1 g l_1 \cos(\varphi - \alpha) + m_2 g l_2 \cos\varphi = 0$. *Auflösen nach φ mit Additionstheoremen liefert*

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\cos\alpha - \frac{m_2 l_2}{m_1 l_1}}{\sin\alpha} \right) = -51.78°$$

Aufgabe 16 (Kollision) *Ein Stab der Masse m und Länge L bewegt sich mit der Geschwindigkeit v ohne Rotation auf einer reibungsfreien Oberfläche in Richtung seiner Breitseite. Zum Zeitpunkt $t = 0$ kollidiert ein Ende des Stabes mit einem unbeweglichen Objekt. Direkt nach der Kollision liegt der Stab noch so wie vorher und sein Zentrum bewegt sich auch noch in die gleiche Richtung, aber mit einer auf $\frac{3}{4}v$ gesunkenen Geschwindigkeit.*



1. *Finden sie die Winkelgeschwindigkeit ω des Stabes direkt nach der Kollision. (Tip: Der Gesamtdrehimpuls im Bezug auf den Kollisionspunkt A bleibt bei der Kollision erhalten.)*
2. *Berechnen sie die gesamte kinetische Energie des Stabes nach der Kollision.*
3. *Finden sie die Geschwindigkeiten der 2 Enden des Stabes direkt nach der Kollision.*

Hinweis: Das Trägheitsmoment des Stabes beträgt $\frac{ML^2}{12}$.

Lösung

1. *Drehimpuls bezüglich Punkt A*

$$\textit{Vor der Kollision:} \qquad 0,5mvL$$

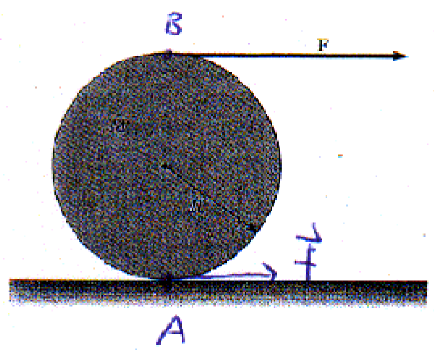
$$\textit{Nach der Kollision:} \qquad m\frac{L}{2}\frac{3}{4}v + I_C\omega$$

Nach der Kollision enthält der Drehimpuls sowohl Beiträge von der Translationsbewegung des Schwerpunkts als auch von der Drehung um die eigene Achse. Mit dem Trägheitsmoment $I_C = \frac{1}{12}mL^2$ ergibt sich aus der Erhaltung des Drehimpulses:

$$mv\frac{L}{2} = m\frac{3v}{4}\frac{L}{2} + I_C\omega \qquad \textit{Also} \qquad \omega = \frac{mv\frac{L}{2} - m\frac{3v}{4}\frac{L}{2}}{I_C} = \frac{3v}{2L}$$

2. *Vor der Kollision:* $E = 0,5mv^2$. *Danach:* $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{3v}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{3}{8}mv^2$
3. *Geschwindigkeit des oberen Endes:* $\frac{3}{4}v + \frac{L}{2}\omega = \frac{3}{2}v$
Geschwindigkeit des unteren Endes: $\frac{3}{4}v - \frac{L}{2}\omega = 0$

Aufgabe 17 (Garnrolle) *Eine Garnrolle mit Masse M und (beim Abrollen konstantem) Radius R wird entlang einer horizontalen Oberfläche mit einer konstanten Kraft F abgewickelt. Nehmen sie, dass die Rolle ein homogener Zylinder ist und nicht gleitet. Der Haftreibungkoeffizient ist μ_H .*



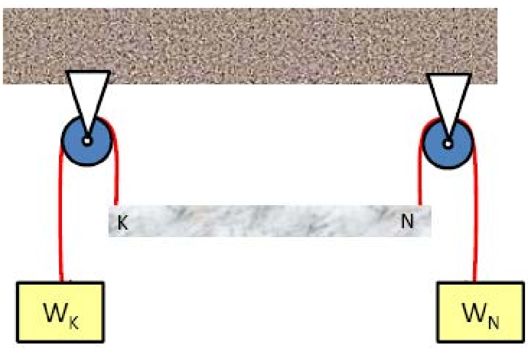
Geben sie die Ergebnisse in Abhängigkeit von F, M, R, μ_H, g und L an:

1. *Trägheitsmoment um die zentrale Achse*
2. *Die Winkelbeschleunigung*
3. *Die Beschleunigung des Schwerpunkts*
4. *Die Reibungskraft f (Betrag und Richtung)*
5. *Die gesamte kinetische Energie der Rolle nach einer Strecke L.*

Lösung

1. *Garnrolle: Trägheitsmoment*
$$I = \frac{1}{2} M R^2$$
2. *Das Drehmoment bezüglich A ist: $M = 2FR$. Bewegungsgleichung: $M = I\dot{\omega}$. Das Trägheitsmoment bezüglich A ist nach dem Satz von Steiner*
$$I = \frac{3}{2} M R^2$$
Damit ergibt sich:
$$\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \frac{4}{3}\frac{F}{MR}$$
3. $a = \dot{\omega} R = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$
4. *Achtung, es gilt $a > \frac{F}{m}$, also zeigen f und F in die gleiche Richtung. Es gilt somit*
$$f + F = ma = \frac{4}{3} F \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{3} F$$
5. *Wenn der Schwerpunkt die Strecke L zurücklegt, bewegt sich der Punkt B eine Strecke von $2L$ (da der Anfangspunkt der Schnurr sich um $2L$ bewegt), also ist $E = W = Fs = 2LF$.*

Aufgabe 18 (Schnitt) *Das Bild zeigt eine Platte und 2 Gewichte die durch die Seile in diesem Gleichgewichtszustand gehalten werden. Das rechte Seil wird plötzlich abgeschnitten. Finden sie in Abhängigkeit der Länge L der Platte und deren Masse m die Beschleunigung am Ende K und am Ende N der Platte.*



Lösung

Die Grundlagen für die Lösung des Problems sind:

1. *Gleichgewicht bedeutet, dass sich alle Kräfte und Drehmomente gegenseitig aufheben.*
2. *Die Bewegungsgleichungen für die Translations-und die Rotationsbewegung können getrennt voneinander aufgestellt werden.*
3. *Das Drehmoment ist definiert durch $M = I\dot{\omega}$, mit dem Trägheitsmoment I.*

Bevor das Seil plötzlich abgeschnitten wird, ist die Summe aller Kräfte 0:

$$W_K + W_N - mg = 0$$

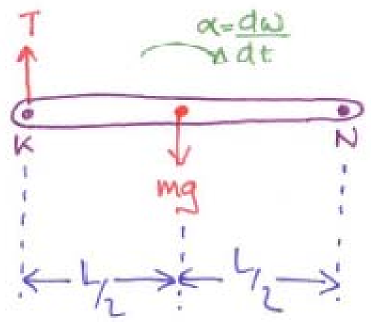
Außerdem ist die Summer der Drehmomente Null

$$W_N L - mg\frac{L}{2} = 0$$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich

$$W_K = W_N = \frac{1}{2}mg$$

Nachdem das Seil bei N abgeschnitten wurde, wirkt das Gewicht der Platte auf deren Schwerpunkt $L/2$ vom Punkt K entfernt. Die Situation direkt nach dem Durchtrennen des Seils wird unten dargestellt. Jetzt müssen die Gleichungen für die Drehbewegung und für die Translationsbewegung aufgestellt werden.



$$ma_{SP} = mg - T$$

(Eine Beschleunigung nach unten wird positiv gerechnet, T ist die Kraft bei K). Es gilt

$$I\dot{\omega} = \textit{Drehmomente} = T\frac{L}{2}$$

Bei der beschleunigten Bewegung hat T nicht mehr den Wert $mg/2$. Das Gewicht W_K erfährt die entgegengesetzte Beschleunigung wie der Punkt K, deshalb haben wir $W_K - T = -ma_K$ als Bewegungsgleichung für das Gewicht W_K, wobei a_K die nach unten gerichtete Beschleunigung von W_K ist. Damit erhalten wir $T = \frac{mg}{2} + ma_K$. Die Bewegungsgleichung für die Translationsbewegung der Platte ist damit

$$ma_{SP} = mg - \frac{mg}{2} - ma_K$$

Die Gleichung für die Rotationsbewegung lautet:

$$I\dot{\omega} = T\frac{L}{2} = \left(\frac{mg}{2} + ma_K\right)\frac{L}{2} \qquad (1)$$

Beim Zusammenfassen dieser beiden Gleichungen über den Term ma_K ergibt sich

$$I\dot{\omega} = \left(\frac{mg}{2} + \left(\frac{mg}{2} - ma_{Sp}\right)\right)\frac{L}{2}$$

Mit der Beziehung $a = r\dot{\omega}$ erhält man für die Beschleunigung der Enden

$$a_K = a_{Sp} - \frac{L\dot{\omega}}{2} \qquad \textit{und} \qquad a_K = a_{Sp} - \frac{L\dot{\omega}}{2}$$

Mit (1) und $I = \frac{mL^2}{12}$, dem Trägheitsmoment einer Platte ergibt das

$$\dot{\omega} = \frac{12Lm}{2mL^2}(g - a_{SP}) = \frac{6}{L}(g - a_{SP})$$

und daraus

$$a_K = a_{SP} - \frac{6}{L}(g - a_{SP})\frac{L}{2} = 4a_{SP} - 3g \qquad \textit{und} \qquad a_N = 3g - 2a_{SP}$$

Mit $ma_{SP} = \frac{mg}{2} - ma_K$ erhält man

$$a_{SP} = \frac{g}{2} - 4a_{SP} + 3g = \frac{7}{10}g$$

Und daraus folgt

$$a_K = -\frac{1}{5}g$$

Aufgabe 19 (Reibung) *Ein Auto mit der Masse m=1000 kg fährt auf einer runden Ebenen Strecke mit dem Radius $100m$. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Reifen und Straße ist $\mu = 0,5$.*

1. *Was ist die maximale Geschwindigkeit in m/s, die maximale Winkelgeschwindigkeit und die Bewegungsenergie?*
2. *Um eine höhere Geschwindigkeit zu erreichen will der Fahrer die Reibungskraft durch $500kg$ zusätzlichen Ballast erhöhen. Was ist die neue maximale Geschwindigkeit?*

Lösung

1. *Bei der maximalen Geschwindigkeit gilt die Gleichung*

   $$M\frac{v^2}{r} = \mu mg$$

   und damit $v = 22m/s$
   $\omega = v/r = 0.22/s$
   $E = 242000J$
2. *Die Geschwindigkeit hängt nicht von der Masse ab (der Masseabhängigkeit der Reibungskraft steht die gleiche Abhängigkeit der Zentrifugalkraft gegenüber.*

Aufgabe 20 (Tonne) *Eine Tonne (homogener Hohlzylinder, Masse M, Radius R und Höhe H) steht* *auf einer seiner flachen Seiten auf einer reibungsfreien Oberfläche. Ein Objekt (Masse m, Geschwindigkeit v_0) trifft die Tonne in der Höhe $H/2$ am Rand. Das Objekt setzt danach seinen Flug in die gleiche Richtung mit $v_0/2$ fort. Vernachlässigen sie das erzeugte Loch und geben sie die Ergebnisse in Abhängigkeit von M, R, H, v_0 und m an.*

1. *Geben sie den Drehimpuls $\vec{L}$ des Gesamtsystems in Bezug auf den Mittelpunkt der Tonne vor der Kollision an.*
2. *Geben sie die Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}$ des Tonnenschwerpunkts nach der Kollision an.*
3. *Wie ist die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Tonne nach der Kollision?*

Lösung

1. $L = \mu v_0 R$ *(zeigt nach oben)*
2. $Mv + \mu v_0/2 = v_0 \mu$
   $v = -\frac{\mu}{2M} v_0$ *(Die Tonne bewegt sich in die gleiche Richtung wie die Kugel!)*
3. $$I\omega + \frac{\mu v_0}{2} R = \mu v_0 R \qquad \Rightarrow \omega = \frac{\mu v_0 R}{2l} = \frac{\mu v_0}{2MR}$$

Aufgabe 21 (Bowling) *Eine Bowlingkugel mit der Masse m und dem Radius R werde so geworfen, dass sie sich nach dem Auftreffen auf der Bahn, ohne zu rotieren, horizontal mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 5m/s$ bewegt. Die Gleitreibungszahl zwischen Kugel und Bahn sei $\mu_G = 0,3$.*

1. *Bestimmen Sie die Zeit, während der die Kugel rollt, bevor die Rollbedingung erfüllt wird.*
2. *Bestimmen Sie die Strecke, die die Kugel durch Gleiten zurücklegt, bevor sie zur reinen Rollbewegung übergeht.*

Lösung

1. *Wenn die Kugel gleitet, ist die resultierende Kraft, die die Kugel von außen erfährt, die Gleitreibungskraft $F_R = \mu_G mg$. Diese zeigt in die der Geschwinigkeit entgegengesetzte Richtung. Der Massenmittelpunkt erfährt eine Beschleunigung $a = \frac{FR}{m} = \mu_G g$. Solange die Kugel gleitet, gilt für ihre Geschwindigkeit:*
   $$v = v_0 - at = v_0 - \mu_G gt$$
   Das resultierende Drehmoment der Kugel relativ zu ihrem Massenmittelpunkt ist
   $$M = \mu_G mgR$$
   Das Trägheitsmoment einer Kugel ist
   $$I = \frac{2}{5} mR^2$$
   Die Winkelbeschleunigung der Kugel ist demnach
   $$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{\mu_G mgR}{\frac{2}{5} mR^2} = \frac{5\mu_G g}{2R}$$
   Die Winkelgeschwindigkeit beträgt damit
   $$\omega = \alpha t = \frac{5\mu_G g}{2R} t$$

Zum Zeitpunkt t_1 wird die Rollbedingung $v = R\omega$ erfüllt und die Kugel hört auf zu gleiten. Gleichsetzen von v und $R\omega$ ergibt

$$v = v_0 - \mu_G g t = R\omega = \frac{5}{2}\mu_G g t_1$$

Auflösen nach $t_1$ergibt

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_G g} = 0,485s$$

2. $s = \langle v \rangle t_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t_1 = 2,08m$

Aufgabe 22 (Trägheitsmoment) *Berechnen sie das Trägheitsmoment eines Quaders mit Länge $5m$, Breite $1m$ und Dicke $20cm$ durch den Schwerpunkt und an einer langen Seite.*

Lösung

$$I = \int_{z=-l/2}^{l/2}\int_{y=-d/2}^{d/2}\int_{x=-b/2}^{b/2} \rho r_\perp^2 dxdydz = \rho l \int_{y=-d/2}^{d/2}\int_{x=-b/2}^{b/2} (x^2+y^2)dydx = \frac{\rho l}{12}(b^3 d + d^3 b)$$

Mit $\rho = M/(lbd)$ ist $J = \frac{M}{12}(b^2 + d^2) = 0,087M$ Für das Trägheitsmoment um eine Achse an der Seite ergibt sich entweder durch Integration (ändern der Grenzen) oder mit dem Satz von Steiner: $J = \frac{M}{12}(b^2 + d^2) + M(b/2)^2 = \frac{M}{12}(4b^2 + d^2) = 0,33Mm^2$

Aufgabe 23 (Beschleunigung auf Schiefe Ebene) *Berechnen Sie die Beschleunigung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene auf 3 verschiedene Arten:*

1. *Aus der Energie (Hinweis: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt}$)*
2. *Aus der Kraft auf den Schwerpunkt*
3. *Durch das Drehmoment bezüglich des Auflagepunkts*

Lösung

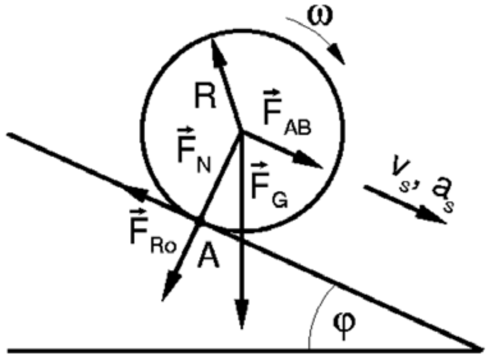
1.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{J}{2}\frac{v_S^2}{R^2} \quad \textit{mit} \quad J = \frac{m}{2}R^2$$

$$E_{pot} = E_{kin} \rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} = -\frac{(4/3)}{2\sqrt{(4/3)gh}}v_y = -\sqrt{\frac{g}{3}\frac{1}{h}}v\sin\varphi = \frac{2}{3}g\sin\varphi$$

2. $am = mg\sin\varphi - F_{Rot}$ *mit* $F_{Rot} = \frac{M}{R}$ *und* $M = J\dot{\omega} = J\frac{v}{R} = \frac{m}{2}R\dot{v}$
$am = mg\sin\varphi - \frac{ma}{2}$
$a = \frac{2}{3}g\sin\varphi$



3. *Die Gewichtskraft erzeugt, bezogen auf den Auflagepunkt A (momentane Drehachse), das Drehmoment:*
$$M_A = RF_{AB} = Rmg\sin\varphi$$
Das Trägheitsmoment um A ist nach dem Satz von Steiner: $J_A = J + mR^2$
Für die Beschleunigung ergibt sich dann:
$$a_S = R\dot{\omega} = R\frac{M_A}{J_A} = g\sin\varphi\frac{mR^2}{\frac{m}{2}R^2 + mR^2} = \frac{2}{3}g\sin\varphi$$

Aufgabe 24 (Mars) *Die Marsbewohner haben erfahren, dass die Menschen einen Besuch auf ihrem Planeten planen. Da sie befürchten, dass die Menschen einen Ersatz für ihre Erde suchen, wollen sie eine Kanone bauen, mit der sie sich verteidigen können. Welche Anfangsgeschwindigkeit müsste die Kugel ($m = 10kg$) mindestens haben, wenn sie ein Objekt mit der Masse $M = 100kg$, das sich auf einer Geostationären Umlaufbahn bewegt, nach einem inelastischen Stoß aus dem Einflussbereich des Planeten bringen soll. ($M_{Mars} = 6,42\cdot 10^{23}kg$, $R_{Mars} = 3400km$) Wie groß ist die Corioliskraft auf eine vom Äquator, mit dieser Geschwindigkeit, gestarteten Kugel (ein Marstag dauert 24 h 27 Minuten).*

Lösung

Wir berechnen zuerst die potentielle Energie eines Körpers in einer bestimmten Entfernung r' vom Mittelpunkt:
$$E = \int_\infty^{r'} \frac{GM_{Mars}m}{r^2}dr = -\frac{GM_{Mars}m}{r}\bigg|_\infty^{r'} = -\frac{GM_{Mars}m}{r'}$$
Die nötige Startgeschwindigkeit erhalten wir durch die Energieerhaltung:
$$E_{kin}(\infty) + E_{pot}(\infty) = \frac{1}{2}m_{Kugel}v^2 + \frac{1}{2}m_{Objekt}r_{GS}^2\omega_{GS}^2 - GM_{Mars}\left(\frac{m_{Kugel}}{r_M} + \frac{m_{Objekt}}{r_{GS}}\right)$$
Für die Geostationäre Umlaufbahn gilt
$$mr\omega^2 = \frac{GM_{Mars}m}{r^2} \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$
Für den Mars erhalten wir $\omega_{GS} = \frac{2\pi}{24\cdot 3600s + 24\cdot 60s} = 7,14\cdot 10^{-5}\frac{1}{s}$. Also ist $r = \sqrt[3]{8,4\cdot 10^{21}m^3} = 20331km$. Die nötige Geschwindigkeit ist dann
$$v = \sqrt{2G\frac{M_{Mars}}{m_{Kugel}}\left(\frac{m_{Kugel}}{R_{Mars}} + \frac{m_{Objekt}}{r_{GS}}\right) - \frac{m_{Objekt}}{m_{Kugel}}r_{GS}^2\omega_{GS}^2} = 2,93\cdot 10^6 m/s$$

Abschätzen der verlorenen Energie:

$$E_{vorher} = \frac{1}{2}m_{Kugel}v^2 + \frac{1}{2}m_{Objekt}r_{GS}^2\omega_{GS}^2 = 4,284 \cdot 10^{13} J$$

$$u_{nachher} = \frac{m_{Kugel}v + m_{Objekt}\omega_{GS}r_{GS}}{m_{Kugel} + m_{Objekt}} = 267422\frac{m}{s}$$

$$E_{nachher} = \frac{1}{2}m_{ges}u_{nachher}^2 = 3,93 \cdot 10^{12} J$$

Aufgabe 25 (Kometenbahn) *Der Komet Halley hat eine Umlaufzeit von 76 Jahren. Seine kleinste Entfernung zur Sonne ist 0,59 AE. Wie weit entfernt er sich maximal von der Sonne und wie groß ist die Exzentrizitt seiner elliptischen Bahn? Hinweis: Suchen Sie eine Relation zwischen T und $(a - e)$.*

Lösung

Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt für die große Halbachse a der Kometenbahn:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}GM_{Sonne}} = 2,68 \cdot 10^{12}m$$

Aus $r_{min} = a(1 - \varepsilon) = 0,59AE = 0,88 \cdot 10^{11}m \quad \Rightarrow \varepsilon = 1 - \frac{r}{a} = 0,967$

Aufgabe 26 (Pendelschwingung) *Welche Schwingungsdauer hätte ein Pendel auf dem Mond, das auf der Erde einmal pro Sekunde schwingt. (Mondmasse: $7,349 \times 10^{22}kg$ und -radius $1738km$)*

Lösung

$T = 2\pi\sqrt{L/g_M} = T_E\sqrt{g_E/g_M}$. *Für* $\sqrt{\frac{g_E}{g_M}} = \frac{R_M}{R_E}\sqrt{\frac{M_E}{M_M}} = 2,47$ *ergibt sich* $T = 2,47s$

Aufgabe 27 (Aus der Semstralen) *Das obere Ende eines homogenen Stabs der Länge L und Masse M mit vernachlässigbarer Breite und Dicke ist drehbar an einem sich in horizontaler Richtung frei beweglichen masselosen Lager befestigt. Eine horizontal mit der Geschwindigkeit v anfliegende Kugel der Masse m trifft das untere Ende des Stabs. Bei welchem Verhältnis m/M wird die Kugel gerade vollständig abgebremst und fällt senkrecht nach unten zu Boden? Berechnen Sie für diesen Fall die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Stabs und die anfängliche horizontale Geschwindigkeit des Aufhängepunktes nachdem die Kugel den Stab getroffen hat (in Abhängigkeit von L und v).*

Lösung

Sei v_S die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Stabs, v_A die Geschwindigkeit der Aufhängung, ω_S die Winkelgeschwindigkeit des Schwerpunkts und v die Geschwindigkeit der Kugel. Da das Lager horizontal beweglich ist und somit keine Zwangskraft überträgt, gilt die Impulserhaltung in horizontaler Richtung:

$$mv = Mv_S \qquad \Rightarrow v_S = \frac{m}{M}v$$

Drehimpulserhaltung in Bezug auf den Schwerpunkt liefert:

$$mv\frac{L}{2} = \Theta_S\omega_S \quad \textit{mit } \Theta_S = \frac{ML^2}{12}$$

Daraus folgt

$$v = \frac{2\Theta_S \omega_S}{mL} = \frac{ML\omega_S}{6m} \qquad \textit{und} \qquad v_S = \frac{m}{M} v = \frac{L\omega}{6}$$

Die Energieerhaltung liefert

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} M v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_S \omega_S^2$$

Die Ausdrücke für v_S und v von oben eingesetzt liefert

$$m \left(\frac{ML\omega_s}{6m} \right)^2 = M \left(\frac{L\omega_S}{6} \right)^2 + \frac{ML^2}{12} \omega_S^2 \qquad \Rightarrow \frac{M}{m} = 4$$

Für die Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$\omega_S = \frac{6m}{ML} v = \frac{3v}{2L} \qquad \textit{und} \qquad v_S = \frac{v}{4}$$

Die Geschwindigkeit der Aufhängung ist dann:

$$v_A = v_S - \frac{L}{2} \omega_S = \frac{v}{4} - \frac{L}{2} \frac{3v}{2L} = -\frac{v}{2}$$

das heißt, dass das Lager sich mit $\frac{v}{2}$ rückwärts zur Flugrichtung der Kugel bewegt.

Aufgabe 28 (Yo-Yo) *Bei einem Yo-Yo mit Masse m, Radius R und Dicke d ist ein Faden um einen Zylinder mit Radius r in der Mitte des Yo-Yo aufgewickelt. Die Masse des Fadens kann vernachlässigt werden. Bevor wir das Yo-Yo loslassen, wird der Faden gespannt.*

1. *Finden sie die Winkel- und Schwerpunktbeschleunigung des Yo-Yos nach dem Loslassen.*
2. *Berechnen sie die Kraft auf den Faden.*

Lösung

1. *Mit A als Referenzpunkt ist das von der Gravitation hervorgerufene Drehmoment $M = mgr$. (Die Kraft am Faden erzeugt in diesem Fall kein Drehmoment.) Das Trägheitsmoment bezüglich diesem Punkt ist $J = \frac{1}{2} m R^2 + m r^2$. Die Winkelbeschleunigung ist dann*

$$\dot{\omega} = \frac{M}{J} = \frac{gr}{\frac{1}{2} R^2 + r^2}$$

2. *Die beschleunigung des Schwerpunkts ist dann*

$$\dot{\omega} r = \frac{gr^2}{\frac{1}{2} R^2 + r^2}$$

3. *Sei F die Kraft auf den Faden, Es gilt $ma = mg - F$. Damit ist*

$$F = mg - ma = mg \frac{\frac{1}{2} R^2}{\frac{1}{2} R^2 + r^2}$$