B Lösungsskizzen

B.1 Lösungsskizzen der Übungsaufgaben zum Kapitel 1

Aufgabe 1 (Zeitabhängige Beschleunigung) *Ein geladenes Teilchen (Ion) bewegt sich im Vakuum kräftefrei mit der Geschwindigkeit v_{x0} längs der x-Achse. Am Ort x_0 tritt es zur Zeit $t = 0$ in ein elektrisches Gegenfeld ein und bewegt sich mit der Beschleunigung $a_x = bt$ weiter.*

(Gegeben: $x_0 = 3,0mm$; $v_{x0} = 2,0\frac{km}{s}$;

1. *Skizzieren Sie das $a_x(t)$-Diagramm (auch für $t < 0$)*
2. *Leiten Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v_x = v_x(t)$ für $t \geq 0$ her*
3. *Leiten Sie die Ort-Zeit-Funktion $x = x(t)$ für $t \geq 0$ her*
4. *Zu welcher Zeit t_U ändert sich die Bewegungsrichtung?*
5. *Wo ist der Umkehrort x_U?*
6. *Skizzieren Sie das $v_x(t)$-Diagramm (auch für $t < 0$)*
7. *Skizzieren Sie das $x(t)$-Diagramm (auch für $t < 0$)*

Lösung:

1. *Die Beschleunigung ist eine lineare Funktion der Zeit, und wegen $b < 0$ im $a_x(t)$-Diagramm eine fallende Gerade. Das absolute Glied fehlt, deshalb beginnt sie im Koordinatenurspring. Für $t < 0$ ist $a_x = \ddot{x} = 0$. (Skizze)*
2. *Mit der Beschleunigung $\ddot{x} = bt$ ergibt sich durch Integration:*

$$\dot{x} = b \int t dt$$

$$\dot{x} = \frac{bt^2}{2} + C; \quad C = v_{x0}$$

Damit ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

$$v_x = \frac{bt^2}{2} + v_{x0}$$

3. *Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion wird noch einmal integriert:*

$$x = \int \left(\frac{bt^2}{2} + v_{x0} \right) dt = \frac{bt^3}{6} + v_{x0}t + C_2; \quad C_2 = x_0$$

Damit erhalten wir eine Orts-Zeit-Funktion:

$$x(t) = \frac{bt^3}{6} + v_{x0} + x_0$$

4. *Das Ion hat zur Zeit t=0 die positive Geschwindigkeit v_{x0}. Das Gegenfeld verringert die Geschwindigkeit und bewirkt eine Umkehr. Zur Zeit t_U, wenn es die Bewegungsrichtung ändert, hat es die Geschwindigkeit null. Zu diesem Zeitpunkt lautet der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit:*
$$0 = \frac{bt^2}{2} + v_{x0}$$
Damit erhalten wir die Umkehrzeit:
$$t_U = \sqrt{-\frac{2v_{x0}}{b}} = \sqrt{+\frac{4,0 \cdot 10^3 m \cdot s^3}{0,75 \cdot 10^{15} m \cdot s}} = 2,3\mu s$$
5. *Den Umkehrort berechnen wir mit der Ort-Zeitfunktion:*
$$x_U = \frac{bt^3}{6} + v_{x0} + x_0 = (-1,5 + 4,6 + 3,0) \cdot 10^{-3} m = 6,1mm$$
6. *Die Funktion $v_x(t)$ stellt wegen $b < 0$ eine nach unten geöffnete Parabel dar, deren Scheitel die Koordinaten $t_0 = 0$ und v_{x0} hat. Bei $t = t_U$ wird die t-Achse geschnitten. Für $t < 0$ hat das Ion die konstante Geschwindigkeit v_{x0}.*
7. *Die Funktion $x(t)$ ist im Bereich $t \geq 0$ eine kubische Parabel. Der Umkehrpunkt (t_U, x_U) ist das Maximum der Parabel. Die Parabel schließt sich bei $t = 0$ an eine Gerade an, weil für $t < 0$ das Ion eine konstante Geschwindigkeit hat.*

Aufgabe 2 (Schiefer Wurf) *Ein Ball soll vom Punkt $P_0(x_0 = 0; y_0 = 0)$ aus unter einem Winkel α_0 zur Horizontalen schräg nach oben geworfen werden. (Gegeben: $x_1 = 6,0m$; $y_1 = 1,5m$; $\alpha_0 = 45$)*

1. *Stellen Sie die Bahngleichung $y(x)$ auf und skizzieren die deren Verlauf.*
2. *Wie groß muss die Abwurfgeschwindigkeit v_0 sein, wenn der Punkt $P_1(x_1; y_1)$ erreicht werden soll?*
3. *Welcher Winkel α_0' und welche Abwurfgeschwindigkeit v_0' müssen gewählt werden, wenn der Ball in horizontaler Richtung in P_1 einlaufen soll?*

Lösung

1. *Für das zweidimensionale Problem wenden wir das Superpositionsprinzip an und betrachten die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ separat. Die Bewegungsgleichung in vertikaler Richung lautet:*
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{y0} \cdot t + y_0$$
Für $y_0 = 0$ und $v_{y0} = v_0 \sin\alpha_0$gilt dann:
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha_0 \cdot t$$
Und in horizontaler Richtung:
$$x(t) = v_{x0} \cdot t + x_0$$
Wobei $x_0 = 0$ und $v_{x0} = v_0 \cos\alpha_0$:
$$x(t) = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\alpha_0}$$

Eingesetzt in die Gleichung für $y(t)$ wird dadurch die Zeit eliminiert, und man erhält eine Funktion von x:

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 + x \cdot \tan \alpha_0$$

Diese Funktion stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar.

2. *Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P_1(x_1, y_1)$ in die obere Gleichung und Auflösen nach $v_0$liefert*

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x_1^2}{2 \cos^2 \alpha_0 (x_1 \tan \alpha_0 - y_1)}} = 8,9 m/s$$

3. *Die Bahngleichung ist gegeben durch*

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0'^2 \cos^2 \alpha_0'} x^2 + x \cdot \tan \alpha_0'$$

Ball läuft in horizontaler Richtung in P_1 ein, wenn in der obigen Gleichung $y(x_1) = y_1$ und $y'(x_1) = 0$ gilt. Diese beiden Bedingungen liefern ein Gleichungssystem für v_0' und α_0', woraus wir erhalten:

$$\tan \alpha_0' = \frac{2y_1}{x_!} \Rightarrow \alpha_0' = 26,6°$$

$$v_0' = \sqrt{g \left(\frac{x_1^2}{2y_1} + 2y_1 \right)} = 12 m/s$$

Aufgabe 3 (Fliehkraftregler) *Zur Einstellung einer vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit einer rotierenden Achse kann ein Fliehkraftregler eingesetzt werden. Das Grundprinzip beruht auf einer Anordnung, bei der an einer vertikalen, rotierenden Achse am oberen Ende zwei Kugeln der Masse m an zwei Armen der Länge d aufgehängt sind. Die Kugeln werden an den Armen mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse gedreht, wobei sich ein zu ω gehörender Winkel α einstellt.*

1. *Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(\alpha)$.*
2. *Für welche Mindestwinkelgeschwindigkeit kann der Fliehkraftregler mit $d = 8cm$ eingesetzt werden?*
3. *Skizzieren Sie α als Funktion von ω.*

Lösung

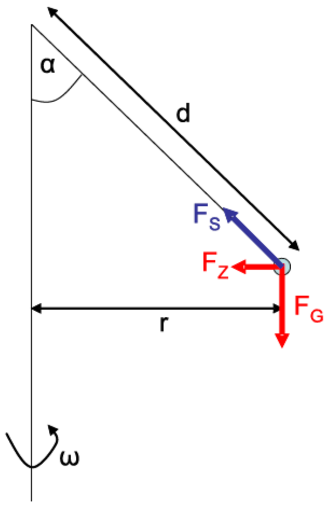
1. *F_Z ist die Zentripetalkraft:*

$$F_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 d \sin \alpha$$

wobei $r = d \sin \alpha$ ist. Jede Kugel zieht am Arm mit F_s, im Kräfteparallelogramm gilt:

$$\vec{F}_s = \vec{F}_Z + \vec{F}_G \Rightarrow \tan \alpha = \frac{|\vec{F}_Z|}{|\vec{F}_G|} = \frac{m\omega^2 d \sin \alpha}{mg} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

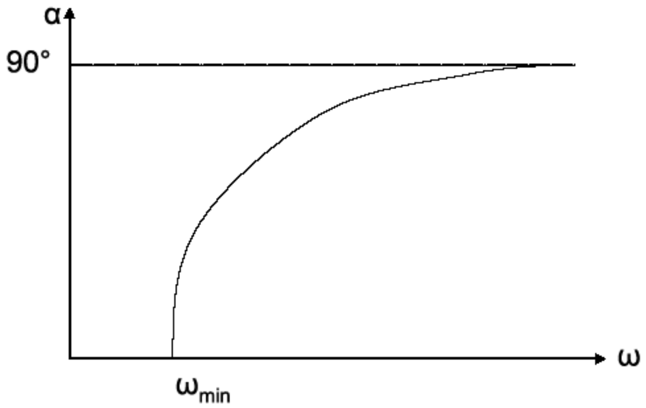
$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{d \cos \alpha}}$$



2. *Für das kleinste* ω *gilt* $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$

$$\rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{d}} = 11,074 s^{-1}$$

3. *Skizze*



Aufgabe 4 (Inelastischer Stoß) *Eine Kugel mit der Masse* $1,8g$ *, die mit* $500m/s$ *fliegt, trifft einen großen, fest stehenden Holzblock und bohrt sich* $6cm$ *weit in ihn hinein, bevor sie zum Stillstand kommt. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Beschleunigung der Kugel konstant ist, die Kraft, die das Holz auf die Kugel ausübt.*

Lösung

Die vom Holz (H) auf die Kugel ausgeübte Kraft ist nach dem zweiten Newton'schen Axiom

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Also ist

$$F_H = ma$$

Die Kugel wid gleichförmig verzögert; daher ergibt isch die Endgeschwindigket uad der Anfangsgeschwindigkeit und der Beschleunigung : $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$. *Mit der Endgeschwindigkeit null ist die*

Beschleunigung daher:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{-v_0^2}{2\Delta x}$$

Dies setzen wir in die Gleichung für die Kraft ein:

$$F_H = \frac{-mv_0^2}{2\Delta x} = -3.75kN$$

Das negative Vorzeichen gesagt, dass die Richtungder Kraft der Bewegungsrichtung entgegen gerichtet ist.

Aufgabe 5 (Energieerhaltung) *Im entspannten Zustand befindet sich das obere Ende einer Feder (Federkonstante k) bei $z = 0$. Legt man einen Körper der Masse m auf dieses Federende, drückt dann die Feder bis z_1 zusammen und lässt danach die Feder sich wieder entspannen, so wird der Körper bis zu einer Höhe z_2 emporgeschleudert.*

1. *Berechnen Sie z_2!*
2. *Welche Geschwindigkeit v_{z3} hat der Körper bei z_3? Die Masse der Feder ist vernachlässigbar gegenüber der des Körpers.* $m = 1kg \quad k = 863N/m \quad z_1 = -0,1m \quad z_3 = 0,2m$

Lösung

1. *Mit dem Energiesatz ergibt sich*

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

$$\underbrace{mgz_1 + \frac{k}{2}z_1^2}_{E_{p1}} + 0 = mgz_2 + 0$$

$E_p$setzt sich aus zwei Teilen zusammen, und zwar herrührend vom Schwerefeld (mgz) und von der Feder $[kz^2/2]$. Im Zustand 2 ist die Feder entspannt, also hat sie keine potentielle Energie. Die Geschwingkeiten sind i n beiden Zuständen gleich Null und damit auch die Werte für die kinetische Energie. Für z_2 folgt:

$$z_2 = z_1 + \frac{kz_1^2}{2mg} = 0,34m$$

2. *Es sind zwei Ansätze aus dem Energiesatz möglich.*

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p3} + E_{k3}$$

$$E_{p2} + E_{k2} = E_{p3} + E_{k3}$$

Der zweite ist bequemer, weil in diesem die ganze linke Gleichugnsseite durch mgy_2dargestellt wird

$$mgz_2 = mgz_3 + \frac{m}{2}v_{z3}^2$$

$$v_{z2} = \pm\sqrt{2g(z_2 - z_3)} = \pm 1,66m/s$$

Beide Vorzeichen sind physikalisch sinnvoll. Das positive gilt für das Steigen und das negative für das Fallen des Körpers.

Aufgabe 6 (Impulserhaltung bei veränderlicher Masse) *Ein Eisenbahnwagen der Masse m_0 rollt* *reibungsfrei und antriebslos auf einem horizontalen Schienenstrang mit der Geschwindigkeit v_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt es mit konstanter Massenrate $\lambda = dm/dt$ zu schneien (senkrecht zur Bewegungsrichtung des Zugs; kein Impulsübertrag). Wie weit ist der Wagen nach der Zeit t gerollt?*

Lösung

Bei $t = 0$ hat der Wagen die Masse m_0, dann:

$$m(t) = m_0 + \lambda t$$

Der Schneefall ist senkrecht zur Bewegung, d.h. keine Beschleunigung für alle t. Aus der Impulserhaltung in horizontaler Richtung:

$$p_0 = const = m(t)v(t) = m_0 v_0$$

folgt

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m_0} t}$$

Durch Integration erhält man:

$$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = v_0 \int_0^t \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m_0} t'} dt' = \frac{v_0 m_0}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{m_0} t\right)$$

Aufgabe 7 (Senkrechter Wurf) *1. Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Ball vom Boden aus senkrecht nach oben geworfen werden, damit er eine Maximalhöhe von $50m$ erreicht?*

2. *Wie lange befindet sich der Ball in der Luft?*
3. *Skizzieren Sie für den Ball die Kurven von y, v und a in Abhängigkeit von t. Zeichnen Sie auf den ersten beiden Kurven ein, zu welcher Zeit der Ball die Maximalhöhe von $50m$ erreicht.*

Lösung

1. *Auf dem höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit des Balls 0. Sei y die senkrechte Achse und setze $v = 0$ in die Gleichung*

   $$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

   und löse nach v_0 auf, so erhält man $v_0 = \sqrt{2gy} = 31m/s$.
2. *Der Ball bleibt in der Luft bis $y = 0$ wieder erfüllt ist. Löse*

   $$0 = y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

   nach t auf, so erhält man 2 Lösungen $t = 0$ und $t = 2v_0/g$. Offensichtlich ist die zweite Lösung der Zeitpunkt der Landung. Wir erhalten $t = 2v_0/g = 6,4s$
3.
   - *Die y-t-Kurve ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum bei $t = 3,2s$.*
   - *Die v-t-Kurve ist eine monoton abfallende Gerade, die bei $t = 3,2s$ den Nulldurchgang hat.*
   - *Die a-t-Kurve ist eine waagrechte Gerade bei $g = 9,81m/s^2$.*

Aufgabe 8 (Schiefer Wurf) *Ein Projektil wird bei einem Winkel θ_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 abgeschossen. Berechnen Sie die Maximalhöhe.*

Lösung

Die y-Koordinate ist gegeben durch

$$y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Die Geschwindigkeit in y-Richtung ist gegeben durch

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

Die Maximalhöhe wird erreicht, wenn $v_y = 0$, d.h. $t = (v_0/g)\sin\theta_0$. Eingesetzt in den Ausdruck für y erhalten wir somit

$$y_{max} = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$$

Aufgabe 9 (Kreisbewegung) *Ein Junge schleudert einen Stein in einem horizontalen Kreis mit einem Radius von $1.5m$ in einer Höhe von $2.0m$ über dem ebenen Erdboden. Die Schnur reißt und der Stein fliegt in horizontaler Richtung davon. Er trifft auf dem Boden auf, nachdem er eine horizontale Entfernung von $10.0m$ zurückgelegt hat. Wie groß ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung des Steins während der Kreisbewegung?*

Lösung

Sei y die vertikale Achse. Nach dem Schnurriss sind die Koordinaten des Steins gegeben durch

$$x = v_0 t \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2$$

Es schlägt auf den Boden auf am Ort $x = 10m$ und $y = -2m$. Lösung der Gleichung für y ergibt

$$t = \sqrt{-2y/g}$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in die Gleichung für x und Auflösen nach v_0 erhält man

$$v_0 = x\sqrt{-\frac{g}{2y}} = 15.7m$$

Der Betrag der Zentrifugalbeschleunigung ist

$$a = \frac{v^2}{r} = 160\frac{m}{s^2}$$

Aufgabe 10 (Reibung) *Eine Kiste mit der Masse $68kg$ wird an einem Seil, das in einem Winkel von $15°$ oberhalb der Horizontalen verläuft, über den Boden gezogen.*

1. *Der Haftreibungskoeffizient sei $\mu_s = 0.5$. Wei groß muss der Betrag der über das Seil ausgeübten Kraft T mindestens sein, damit die Kiste anfängt sich zu bewegen?*
2. *Der Gleitreibungskoeffizient sei 0.35. Wie groß ist der Betrag der Anfangsbeschleunigung des Körpers?*

Lösung

1. *Sei f die Haftreibungskraft, dann gilt nach dem 2. Newtonschen Gesetz für die Richtung parallel zur schiefen Ebene*
$$T\cos\theta - f = 0 \Leftrightarrow f = T\cos\theta$$
Sei N die Normalkraft, dann lautet die Gleichgewichtsbedingung
$$N = mg - T\sin\theta$$
Die Kiste bleibt in Ruhe, wenn die Reibungskraft f kleiner als die Grenzhaftreibungskraft $\mu_s N$ ist. Bei $f = \mu_s N$ beginnt die Kiste sich zu bewegen, d.h.
$$T\cos\theta = \mu_s(mg - T\sin\theta) \quad \Rightarrow T = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = 304N$$

2. *Die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Bewegen der Kiste lautet*
$$T\cos\theta - f = ma \qquad \textit{und} \qquad N + T\sin\theta - mg = 0$$
Das Gleitreibungsgesetz lautet $f = \mu_k N$. Die 2. obige Gleichung liefert $N = mg - T\sin\theta$. Wie zuvor ist
$$f = \mu_k(mg - T\sin\theta)$$
Eingesetzt in die erste obige Gleichung liefert
$$T\cos\theta - \mu_k(mg - T\sin\theta) = ma \quad \Rightarrow a = \frac{T(\cos\theta + \mu_k\sin\theta)}{m} - \mu_k g = 1,3m/s^2$$

Aufgabe 11 (Arbeit und Leistung) *Eine Person zieht einen beladenen Handwagen mit konstanter Geschwindigkeit $v_1$bergauf und bringt dabei die Zugkraft F' in Deichselrichtung auf. Die Straße hat den Neigungswinkel α. Deichsel und Bewegungsrichtung schließen den Winkel β ein. Während der Bewegung tritt die Rollreibungskraft $F_R$auf.*

1. *Welche Arbeit W' wird von der Person in der Zeit t' verrichtet?*
2. *Welche Leistung P' wird dabei aufgebracht?*
3. *Welche Masse m hat der beladene Handwagen?*
4. *Welche Höhe $h_1$wird in der Zeit t_1 überwunden?*

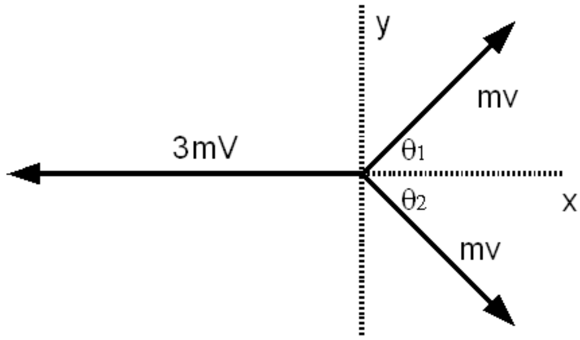
$F' = 0,16kN \quad \alpha = 5° \quad t_1 = 125s \quad v_1 = 1,1m/s \quad \beta = 30° \quad F_R = 40N$

Lösung

1. $W' = F'v_1 t_1 \cos\beta = 19kJ$
2. $P' = F'v_1\cos\beta = 0,15kW$
3. $m = (F'\cos\beta - F_R)/(g\sin\alpha) = 115kg$
4. $h_1 = v_1 t_1 \sin\alpha = 12m$

Aufgabe 12 (Impulserhaltung) *Ein ruhendes Gefäß zerspringt in drei Teile. Zwei gleich schwere Teile fliegen mit gleicher Geschwindigkeit $(30m/s)$ entlang zueinander senkrecht stehender Bahnen davon. Das dritte Teil ist dreimal so schwer wie jedes der beiden anderen. Geben Sie den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit dieses dritten Teils unmittelbar nach der Explosion an.*

Lösung



Da keine externen Kräfte wirken, ist der Gesamtimpuls erhalten. Wegen Symmetrie und Impulserhaltung in y-Richtung ist im Bild $\theta_1 = \theta_2 = 45°$*. Impulserhaltung in x-Richtung liefert* $3mV = 2mv\cos\theta_1 \quad \Rightarrow \ V = \frac{2}{3}v\cos\theta_1 = 14m/s$*. Der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor des großen und eines der kleinen Bruchstücke ist* $135°$*.*