A. Übungsaufgaben

A.1. Aufgaben zum Kapitel 4

A.1.1. Tutoraufgaben

Aufgabe 1 (Hausaufgabe Blatt 12) *Man löse das RAWP mit Hilfe des Ansatzes von d'Alembert*

$$\begin{aligned}
&(PDGL) \qquad & u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \;\; , 0 < x < \infty \, , t > 0, \\
&(AB) & u(x,0) = f(x) \;\; , x \geq 0 \, , \\
& & u_t(x,0) = g(x) \;\; , x \geq 0 \, , \\
&(RB) & u_x(0,t) = h(t) \;\; , t \geq 0 \, ,
\end{aligned}$$

wobei $f(\xi), g(\xi), h(\xi)$ ***nur*** *für* $\xi \geq 0$ *definiert und dort hinreichend oft differenzierbar sind.*
HINWEIS:
Man bestimme zunächst mit den AB eine Lösung im Bestimmtheitsbereich $\mathcal{B}_I \equiv \{(x,t) \, , 0 \geq t \geq x\}$ *und anschließend mit den RB und den Werten* $u(t,t) \, , t \geq 0$ *wiederum mit der Formel von d'Alembert eine Lösung in* $\mathcal{B}_{II} \equiv \{(x,t) \, , 0 \geq x \geq t\}$*, siehe Abb.A.1*

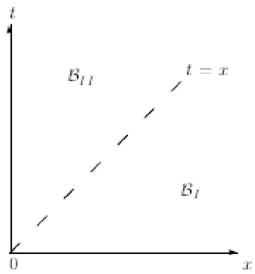


Abbildung A.1.: Bestimmtheitsbereiche $\mathcal{B}_{I,II}$.

Aufgabe 2 *Mittels Separationsansatz der Form* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *löse man das RAWP (siehe Abb.A.2) zur Wellengleichung*

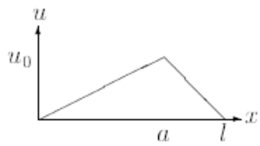


Abbildung A.2.: Anfangsbedingung $u_0(x)$

$$
\begin{aligned}
&(PDGL) && u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0\ , \\
&(AB) && u(x,0) \equiv u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} u_0 & , x \in [0,a] \\ \frac{l-x}{l-a} u_u & , x \in]a,l] \end{cases} \\
& && u_t(x,0) \equiv u_1(x) = 0\ , \\
&(RB) && u(0,t) = u(l,t) = 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 *Gegeben sei die lineare PDGL*

$$u_t = u_{xx} + 6u_x + 9u\ , x \in [0,\pi]\ ,\ t \geq 0\ .$$

Man bestimme alle linear unabhängigen Lösungen (Basislösungen) der Form

$$u(x,t) = f(x)g(t)\ , \text{ (Separationsansatz)}$$

die den Randbedingungen $u(0,t) = 0$ und $u(\pi,t) = 0$ für $t \geq 0$ genügen.

Aufgabe 4 (Hausaufgabe Blatt 13)

a) Zur numerischen Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in \Omega =]0,1[^2 \backslash]0,\frac{1}{2}]^2$$
$$\textit{mit Nullrandbedingung}\ \ u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

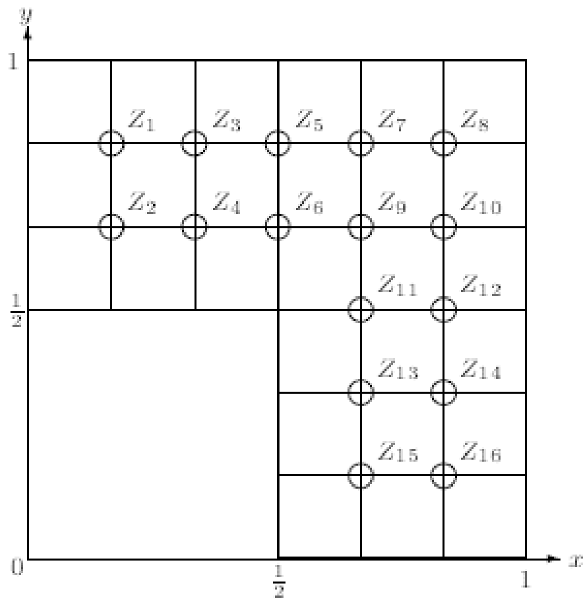


Abbildung A.3.: Diskretisierung von Ω.

wende man den 5-Punkte-Stern auf die vorgegebene äquidistante Diskretisierung (vgl. Abb.A.3) mit inneren Punkten $Z_1, \ldots, Z_{16}$ an. Welche Form und Bandbreite hat die Sy-

stemmatrix des resultierenden linearen Gleichungssystems

$$\left(A_h u_h(Z_j)\right)_{j=1,\ldots,16} = \left(f(Z_j)\right)_{j=1,\ldots,16} \text{ ?}$$

b) *Wie sieht die Matrix A_h mit der Diskretisierung aus a) für die Helmholtz-Gleichung*

$$-\Delta u(x,y) + u(x,y) = f(x,y)$$

auf dem Gebiet Ω mit Nullrandbedingung aus?

A.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

Aufgabe 5 *Man löse mit Hilfe des Lösungsansatzes von d'Alembert*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} \quad , 0 < x < \pi, \;\; t > 0 \, , && \text{(Wellengleichung)} \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} \quad , 0 \le x \le 4 \, , && \text{(Anfangsbedingung)} \\ u(2t,t) &= \sin t \quad , 0 \le t \le \frac{\pi}{4} \, , && \text{(Bedingung entlang} \\ & && \text{der Charakteristik } x = 2t\text{).} \end{aligned}$$

Wo ist die Lösung definiert?

Aufgabe 6 *Man löse mit Hilfe des Lösungsansatzes von d'Alembert*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \quad , 0 < x < \frac{\pi}{2}, \;\; t > 0 \, , && \text{(Wellengleichung)} \\ u_x(0,t) &= \sin t \quad , 0 \le t \le \pi \, , && \text{(Randbedingung)} \\ u(t,t) &= 2\sin^2 t \quad , 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \, , && \text{(Bedingung entlang} \\ & && \text{der Charakteristik).} \end{aligned}$$

Wo ist die Lösung definiert?

Aufgabe 7 *Mittels Separationsansatz löse man*

a) $u_{xy} + yu_x - xu_y = 0$

b) $xu_{xy} - u_y - y = 0$

c) $u_{yy} + u_x \tan x = u$

Aufgabe 8 *Gegeben Sei die lineare PDGL*

$$u_t = u_{xx} + 4u \quad , x \in \mathbb{R} \, , t > 0 \, .$$

a) *Man bestimme alle Lösungen (Basislösungen) der Form*

$$u(x,t) = f(x)g(t) \, ,$$

die der Periodizitätsbedingung $u(x+2\pi,t) = u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}, t > 0$ genügen.

b) *Durch den Ansatz als unendliche Linearkombination aus a) (Superposition) bestimme man eine 2π-periodische Lösung, die der Anfangsbedingung*

$$u(x,0) = 1 + \sin 4x \quad , x \in \mathbb{R} \,,$$

genügt.

Aufgabe 9 *Zur numerischen Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in \Omega\ ,$$
$$\Omega = \{(x,y), y < x < y+1,\ 0 < y < \frac{5}{3}\}$$
$$\text{mit Nullrandbedingung}\ \ u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

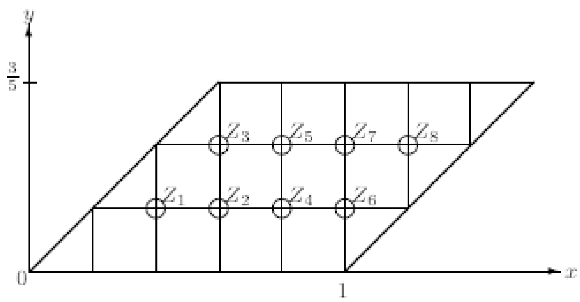


Abbildung A.4.: Diskretisierung von Ω.

wende man den 5-Punkte-Stern auf die vorgegebene äquidistante Diskretisierung (vgl. Abb.A.4) mit inneren Punkten $Z_1, \ldots, Z_8$ an.

a) *Man stelle die Systemmatrix A_h des resultierenden Gleichungssystems*

$$\left(A_h u_h(Z_j)\right)_{j=1,\ldots,8} = \left(f(Z_j)\right)_{j=1,\ldots,8} \ \ \textit{auf.}$$

b) *Welche Struktur (Anzahl der Sub-, Superdiagonalen) hat A_h ?*

B. Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

B.1. Lösungen zum Kapitel 4

B.1.1. Tutoraufgaben

Lösungsskizze 1

(PDG) $u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < \infty \, , \quad t > 0$

(AB) $u(x,0) = f(x) \quad , \quad x \geq 0$

$u_t(x,0) = g(x) \quad , \quad x \geq 0$

(R.B) $u_x(0,t) = h(t) \quad , \quad t \geq 0$

i) Lösung für (PDG) + (AB) analog TÜ bei

"lokale" Darstellung der Lösung der (PDG) nach d'Alembert:

$u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$ (vgl. TÜ a)

A.B.'en: $f(x) = u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) \quad , \quad x \geq 0$

$g(x) = u_t(x,0) = \varphi'(x) - \psi'(x) \quad , \quad x \geq 0 \Longrightarrow$

$$\int_0^x g(\xi)\, d\xi = \varphi(x) - \psi(x) - (\varphi(0) - \psi(0))$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \int_0^x g(\xi)\, d\xi + (\varphi(0) - \psi(0))\right)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \int_0^x g(\xi)\, d\xi - (\varphi(0) - \psi(0))\right)$$

Zusammen:

$$(L_1) \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\, d\xi \right)$$

! f und g sind nur definiert für Argumente ≥ 0,

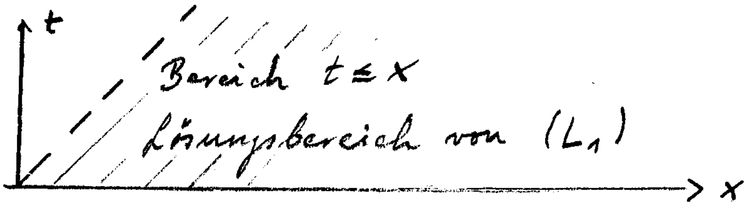
d.h. in (L_1) muß gelten

$x + t \geq 0$ und $x - t \geq 0$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$t \geq -x$ (immer erfüllt für $x \geq 0$) $\qquad t \leq x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$



ii) Betrachtung des Bereichs $0 \le x \le t$

① aus Problemstellung (R.B) $u_x(0,t) = h(t)$, $t \ge 0$

② aus (L_1) $u(t,t) = \frac{1}{2}\left(f(2t) + f(0) + \int_0^{2t} g(\xi)\, d\xi\right)$, $t \ge 0$

Allgemeiner Ansatz von d'Alembert $u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$ liefert:

aus ①: $h(t) = u_x(0,t) = \varphi'(t) + \psi'(-t)$ $(*)$

aus ②: $\frac{1}{2}\left(f(2t) + f(0) + \int_0^{2t} g(\xi)\, d\xi\right) = u(t,t) = \underbrace{\varphi(2t)}_{(**)} + \psi(0)$

Integration von $(*)$ liefert:

$$\int_0^t h(\hat{\tau})\, d\hat{\tau} = \varphi(t) - \psi(-t) - \varphi(0) + \psi(0), \quad t \ge 0$$

Aus $(**)$ kommt $\varphi(\tau) = \frac{1}{2}\left(f(\tau) + f(0) + \int_0^{\tau} g(\xi)\, d\xi\right) - \psi(0)$, $\tau \ge 0$

und dann $\psi(-\tau) = \varphi(\tau) - \int_0^{\tau} h(\hat{\tau})\, d\hat{\tau} - \varphi(0) + \psi(0)$, $\tau \ge 0$

Zusammen:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x+t) + \psi(x-t) = \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(0) + \int_0^{x+t} g(\xi)\, d\xi\right) - \psi(0) \; + \\ &+ \frac{1}{2}\left(f(t-x) + f(0) + \int_0^{t-x} g(\xi)\, d\xi\right) - \psi(0) \\ &- \int_0^{t-x} h(\hat{\tau})\, d\hat{\tau} - \varphi(0) + \psi(0) \end{aligned}$$

$$(L_2)\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(t-x) + \int_0^{x+t} g(\xi)\, d\xi + \int_0^{t-x} g(\xi)\, d\xi\right) - \int_0^{t-x} h(\xi)\, d\xi + \underbrace{\underbrace{f(0)}_{=u(0,0)} - \underbrace{(\varphi(0) + \psi(0))}_{u(0,0)}}_{=0},$$

falls $x+t \ge 0$ und $t-x \le 0$

(erfüllt im ganzen Bereich $0 \le x \le t$)

Lösungsskizze 2 *Im folgenden deutet der Punkt die Differentiation nach der Zeit t und der Strich die Differentiation nach dem Ort x an.*

- *der Ansatz eingesetzt in die PDGL ergibt*

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{c^2}X(x)\ddot{T}(t) \ \mid : X(x)T(t)$$
$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{c^2T} = \frac{X''}{X} = \text{const} = \lambda \ \in \mathbb{R}$$

- *somit erhält man die zwei gewöhnlichen DGL*

$$\textit{(DGL1)} \quad X'' + \lambda^2 X = 0 \ ,$$
$$\textit{(DGL2)} \quad \ddot{T} + c^2\lambda^2 T = 0$$

- *aus der Randbedingung folgt*

$$\textit{(RB1)} \qquad X(0) = X(l) = 0$$

- *da die Lösungsfunktionen der DGL1/2 für $\lambda = 0$ Geraden sind, ergeben sie keine nichttrivialen Lösungen, die die RB erfüllen. Für $\lambda \neq 0$ ergeben sich die allgemeinen Lösungen*

$$X(x) = a_1\cos(\lambda x) + a_2\sin(\lambda x) \ ,$$
$$T(t) = b_1\cos(\lambda ct) + b_2\sin(\lambda ct)$$

- *aus der RB1 folgt*

$$X(0) = a_1\cos(\lambda x) = 0 \ \Rightarrow a_1 = 0 \qquad , X(l) = 0 + a_2\sin(\lambda x) = 0 \ ,$$
$$\Longrightarrow \ \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \ ,$$
$$\Longrightarrow \ X_k(x) = \tilde{a}_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad , T_k(t) = \tilde{b}_{1,k}\cos\left(\frac{k\pi}{l}ct\right) + \tilde{b}_{2,k}\sin\left(\frac{k\pi}{l}ct\right)$$

- *die vollständige allgemeine Lösung, die bisher nur die RB erfüllt, ergibt sich durch Superposition mit den neuen Koeffizienten $a_k \equiv \tilde{a}_k\tilde{b}_{1,k}$, $b_k \equiv \tilde{a}_k\tilde{b}_{2,k}$ zu*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\left(a_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}ct\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}ct\right)\right)$$

- *nun folgt die Anpassung an die allgemeinen AB*

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \stackrel{!}{=} u_0(x) \ ,$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} cb_k\frac{k\pi}{l}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \stackrel{!}{=} u_1(x) \ ,$$

d.h. a_k bzw. $cb_k\frac{k\pi}{l}$ sind somit die Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihen von $u_0(x)$ bwz.

$u_1(x)$. *Diese sind definiert als:*

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \ , \\
b_k =& \frac{2}{k\pi c} \int_0^l u_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \ ,
\end{aligned}
$$

Nun berechnen wir die Fourierkoeffizienten für die explizit gegebenen Funktionen $u_0(x), u_1(x)$.

- $u_1(x) = 0 \implies b_k = 0$
-

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{l} u_0 \left[\int_0^a \frac{x}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x + \int_a^l \frac{l-x}{l-a} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \right] \\
& \textit{mit} \ \int x \sin(bx) \mathrm{d}x = \frac{\sin bx}{b^2} - \frac{x \cos bx}{b} \ \textit{folgt} \\
a_k =& \frac{2}{l} u_0 \Bigg(\frac{l^2}{k^2\pi^2 a} \sin\left(\frac{k\pi}{l} a\right) - \frac{l}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{l} a\right) + \frac{l^2}{k^2\pi^2 (l-a)} \sin\left(\frac{k\pi}{l} a\right) \\
& - \frac{1}{l-a} \Bigg[\frac{l^2}{k\pi} \cos(k\pi) - \frac{l^2}{k\pi} \cos(k\pi) \\
& + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin(k\pi) + \frac{(a-l)l}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{l} a\right) \Bigg] \Bigg) \\
=& u_0 \frac{2l^2}{a(l-a)} \frac{\sin\left(k\pi \frac{a}{l}\right)}{(k\pi)^2}
\end{aligned}
$$

- *Endergebnis:*

$$
u(x,t) = u_0 \frac{2l^2}{a(l-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k\pi \frac{a}{l}\right)}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l} ct\right)
$$

Lösungsskizze 3 *Im folgenden deutet der Punkt die Differentiation nach der Zeit* t *und der Strich die Differentiation nach dem Ort* x *an.*

- *der Ansatz eingesetzt in die PDGL ergibt*

$$
\begin{aligned}
f(x)\dot{g}(t) = f''(x)g(t) + 6f'(x)g(t) + 9f(x)g(t) \ \ | : f(x)g(t) \\
\Rightarrow \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = \frac{f''(x) + 6f'(x) + 9f(x)}{f(x)} = \mathrm{const} = c \ \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- *somit erhält man die zwei gewöhnlichen DGL*

$$
\begin{aligned}
\textit{(DGL1)} \quad & f'' + 6f' + (9-c)f = 0 \ , \\
\textit{(DGL2)} \quad & \dot{g} = cg
\end{aligned}
$$

- *aus der Randbedingung folgt*

$$\textit{(RB1)} \qquad f(0) = f(\pi) = 0$$

Zunächst wird die DGL1 und RB1 betrachtet:

- *das charakteristische Polynom und die Nullstellen sind*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{c}$$

- *Fallunterscheidung!* $c > 0$ *liefert den Lösungsansatz*

$$f(x) = e^{-3x} \left(a\cosh(\sqrt{c}x) + \sinh(\sqrt{c}x) \right) \ ,$$

  womit aus den RB1 folgt

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad &: \qquad & 0 = a + 0 \ \Rightarrow a = 0 \ , \\ f(\pi) = 0 \quad &: \qquad & 0 = e^{-3\pi}(0 + b\underbrace{\sinh(\sqrt{c}\pi)}_{>0}) \ \Rightarrow b = 0 \ , \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ *nur triviale Lsg.*

- $c = 0$ *gibt den Lösungsansatz*

$$f(x) = e^{-3x}(a + bx) \ ,$$

  womit aus den RB1 folgt

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad &: \qquad & 0 = a + 0 \ \Rightarrow a = 0 \ , \\ f(\pi) = 0 \quad &: \qquad & 0 = e^{-3\pi}(a + b\pi) \ \Rightarrow b = 0 \ , \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ *nur triviale Lsg.*

- $c < 0$ *gibt den Lösungsansatz*

$$f(x) = e^{-3x} \left(a\cos(\sqrt{c}x) + b\sin(\sqrt{c}x) \right) \ ,$$

  womit aus den RB1 folgt

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad &: \qquad & 0 = a + 0 \ \Rightarrow a = 0 \ , \\ f(\pi) = 0 \quad &: \qquad & 0 = e^{-3\pi}(0 + b\sin(\sqrt{c}\pi)) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{|c|}\pi = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{N} \ , \\ &\qquad \Rightarrow c = c_k = -k^2 \ , \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ *nichttriviale Eigenlsg.* $f_k(x) = b_k \sin(kx)e^{-3x}$.

Die Lösung der DGL2 erhält man einfach durch aufintegrieren

$$g_k(t) = d_k e^{-k^2 t} \ .$$

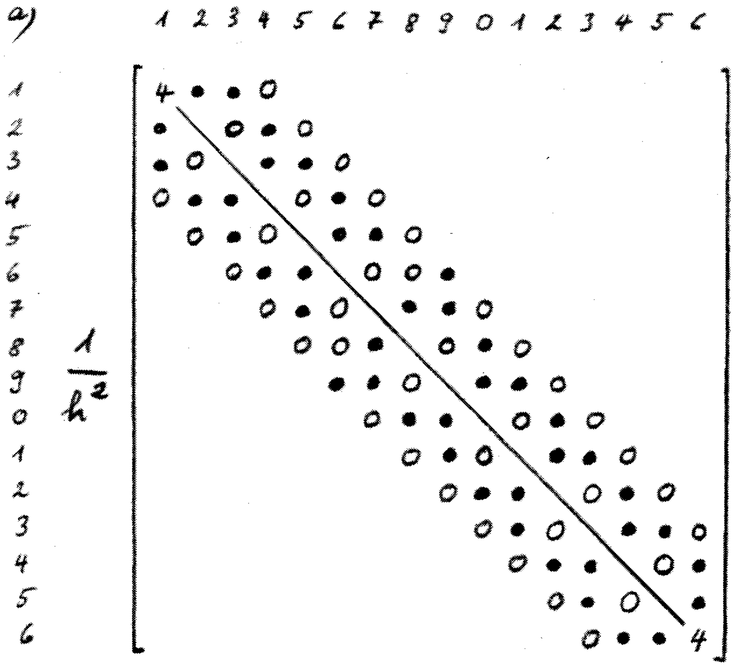
Damit folgt für die Gesamtlösung das Endergebnis:

$$u_k(x,t) = g_k(t) f_k(x) = b_k d_k e^{-3x} e^{-k^2 t} \sin(kx) \ .$$

Lösungsskizze 4

Finite Differenzen

a) $\bullet \mathrel{\widehat{=}} -1$



$= A_h$

(Die Nullen sind der Deutlichkeit halber eingezeichnet)

Die Systemmatrix A_h ist symmetrische Bandmatrix mit 3 Subdiagonalen und 3 Superdiagonalen.

b) Systemmatrix $\hat{A}_h$ für Helmholtzgleichung

$$\hat{A}_h = \underbrace{A_h}_{\text{aus a)}} + \underbrace{I}_{\text{Einheitsmatrix}}$$

$\hat{A}_h$ hat dieselbe Struktur wie A_h

B.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

Lösungsskizze 5 *Der Ansatz von d'Alembert ist mit* $c = 2 \to u(x,t) = \varphi(x+2t) + \psi(x-2t)$.

- *die Anfangsbedingung in den Ansatz eingesetzt, ergibt*

$$2\varphi'(x) - 2\psi'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} \quad , 0 \leq x \leq \pi \; .$$

- *die Bedingung entlang der Charakteristik ergibt*

$$\varphi(4t) + \psi(0) = \sin t \quad , 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \; ,$$

bzw. mit $\tau \equiv 4t$

$$\Rightarrow \; \varphi(\tau) = \sin\frac{\tau}{4} - \psi(0) \quad , 0 \leq \tau \leq \pi$$

- *das letzte Ergebnis in die Randbedingung eingesetzt und für* x *und* τ *die Variable* η *verwendet (unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs), ergibt*

$$\psi'(\eta) = \frac{1}{4}\cos\frac{\eta}{4} - \frac{1}{4}\cos\frac{\eta}{4} = 0 \quad , 0 \leq \eta \leq \pi \; ,$$

somit ist

$$\psi(\eta) = \psi(0) = \mathrm{const}$$

Zusammen ergibt sich

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{x+2t}{4}\right) \; ,$$

wobei der Definitionsbereich ϑ *definiert ist durch*

$$\vartheta \;\; : \begin{cases} 0 \leq \tau = x + 2t \leq \pi \; , \\ 0 \leq x \leq \pi \; , \\ 0 \leq \eta = x - 2t \leq 0 \; , \\ \; t \geq 0, \end{cases}$$

und dargestellt in Abb.B.1

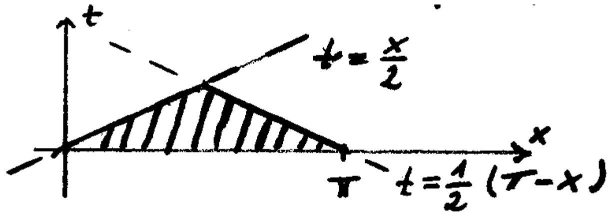


Abbildung B.1.: Definitionsbereich ϑ.

Lösungsskizze 6 *Der Ansatz von d'Alembert ist wie üblich* $u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$.

- *die Randbedingung in den Ansatz eingesetzt, ergibt*

$$\varphi'(t) + \psi'(-t) = \sin t \ \ ,0 \le t \le \pi \ .$$

- *die Bedingung entlang der Charakteristik ergibt*

$$\varphi(2t) + \psi(0) = 2\sin^2 t \ \ ,0 \le t \le \frac{\pi}{2} \ ,$$

bzw. mit $\tau \equiv t$

$$\varphi(\tau) = 2\sin^2 \frac{\tau}{2} - \psi(0) \ \ ,0 \le \tau \le \pi$$

- *das letzte Ergebnis in die Randbedingung eingesetzt und* τ *mit* t *ersetzt, ergibt*

$$2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} + \psi'(-t) = \sin t \ \ ,0 \le t \le \pi \ ,$$

$$\Rightarrow \ \psi'(-t) = 0 \ \ ,0 \le t \le \pi \ ,$$

bzw. mit $\eta = -t$

$$\psi'(\eta) = 0 \ \ ,-\pi \le \eta \le 0 \ ,$$

somit ist

$$\psi(\eta) = \psi(0) = \text{const} \ \textit{für} \ ,-\pi \le \eta \le 0$$

Das Endergebnis lautet somit

$$u(x,t) = \varphi(\underbrace{x+t}_{\tau}) + \psi(\underbrace{x-t}_{\eta}) = 2\sin^2\left(\frac{x+t}{2}\right) \ ,$$

wobei der Definitionsbereich ϑ *definiert ist durch*

$$\vartheta \ : \begin{cases} 0 \le \tau = x+t \le \pi \ , \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \\ -\pi \le \eta = x-t \le 0 \ , \\ t \ge 0, \end{cases}$$

und dargestellt in Abb.B.2

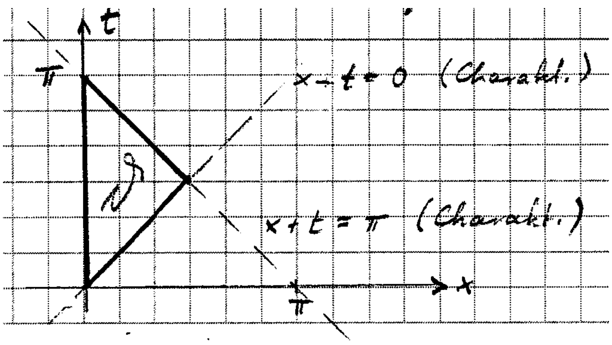


Abbildung B.2.: Definitionsbereich ϑ.

Lösungsskizze 7 *a)* $u_{xy} + yu_x - xu_y = 0$ *mittels Ansatz* $u(x,y) = X(x)Y(y)$*; einsetzen und Division durch* $X'Y'$ *liefert mit der Separationskonstante* c

$$1 + \frac{yY}{Y'} = \frac{xX}{X'} = c\,.$$

Die Lösung beider DGL erhält man durch Trennung der Variablen:

$$X(x) = K_1 e^{\frac{x^2}{2c}} \quad , \; Y(y) = K_2 e^{\frac{y^2}{2(c-1)}}\,.$$

Endergebnis:

$$u(x,y) = Ke^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}x^2 + \frac{1}{c-1}y^2\right)}\,.$$

b) $xu_{xy} - u_y - y = 0$ *mittels Ansatz* $u(x,y) = X(x)Y(y)$*; einsetzen und Division durch* Y' *liefert mit der Separationskonstante* c

$$xX' - X = \frac{y}{Y'} = c\,.$$

Die Lösung beider DGL erhält man durch Trennung der Variablen (bzw. scharfen Blick)

$$X(x) = -c + K_1 x \quad , \; Y(y) = \frac{y^2}{2c} + K_2\,.$$

Endergebnis:

$$u(x,y) = (K_1 x - c)\left(\frac{y^2}{2c} + c_2\right) \text{ oder umsortiert } = (Axy^2 + Bx + C) - \frac{1}{2}y^2\,.$$

c) $u_{yy} + u_x \tan x = u$ *mittels Ansatz* $u(x,y) = X(x)Y(y)$*; einsetzen und Division durch* XY *liefert mit der Separationskonstante* c

$$\frac{Y''}{Y} - 1 = -\frac{-X'}{X}\tan x = c\,.$$

Für die Lösung der X*-DGL benötigt man* $\int \frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x$*. Es folgt* $X(x) = K_1 \sin x$.

Die DGL in Y *ist die übliche DGL mit konstanten Koeffizienten mit der allgemeinen Lsg.* $Y(y) = K_2 e^{\sqrt{c+q}y} + K_3 e^{-\sqrt{c+q}y}$*, d.h. Fallunterscheidung für* c *usw.*

Lösungsskizze 8 *Im folgenden deutet der Punkt die Differentiation nach der Zeit* t *und der Strich die Differentiation nach dem Ort* x *an.*

- *der Ansatz eingesetzt in die PDGL ergibt*

$$\begin{aligned} f(x)\dot{g}(t) &= f''(x)g(t) + 4f(x)g(t) \;\; | : f(x)g(t) \\ \Rightarrow \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} &= \frac{f''(x) + 4f(x)}{f(x)} = \text{const} = c \;\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- *somit erhält man die zwei gewöhnlichen DGL*

$$\begin{aligned} &\textit{(DGL1)} \quad f'' + (4-c)f = 0\ , \\ &\textit{(DGL2)} \quad \dot{g} = cg \end{aligned}$$

- *aus der Randbedingung folgt*

$$\textit{(RB1)} \qquad f(x+2\pi) = f(x) = 0\ \forall \mathbb{R}$$

Zunächst wird die DGL1 und RB1 betrachtet:

- *das charakteristische Polynom und die Nullstellen sind*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4 - c = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{c-4}$$

- *Fallunterscheidung!* $c > 4$ *liefert den Lösungsansatz*

$$f(x) = a\cosh(\sqrt{c-4}x) + \sinh(\sqrt{c-4}x) \overset{RB1}{\Longrightarrow} a = b = 0\ .$$

- $c < 4$*:*

$$\begin{aligned} &f(x) = a\cos(\sqrt{4-c}x) + b\sin(\sqrt{4-c}x)\ , \\ &\textit{RB1:}\ \sqrt{4-c}2\pi = k2\pi \ \ , k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow\ c = c_k = 4 - k^2\ , f_k(x) = a\cos(kx) + \sin(kx) \end{aligned}$$

- $c = 4$ *(kann als Grenzfall des vorherigen für* $k = 0$ *gesehen werden, daher der Index 0):*

$$f(x) = a_0 + b_0 x \overset{RB1}{\Longrightarrow} a = 0 \ \Longrightarrow f_0(x) = b_0$$

Die Lösung der DGL2 erhält man einfach durch aufintegrieren und $c_k = 4 - k^2$*:*

$$g_k(t) = d_k e^{(4-k^2)t} \ \ , k \in \mathbb{N}_0$$

Damit folgt für die Gesamt-Basislösungen

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= a_0 b_0 e^{4t} \equiv \frac{\tilde{a}_0}{2} e^{4t}\ , \\ u_k(x,t) &= e^{(4-k^2)t}\big(\underbrace{a_k d_k}_{\tilde{a}_k}\cos(kx) + \underbrace{b_k d_k}_{\tilde{b}_k}\sin(kx)\big) \ \ , k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und durch Superposition die vollständige allgemeine Lsg.

$$u(x,t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} e^{4t} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(4-k^2)t}\Big(\tilde{a}_k\cos(kx) + \tilde{b}_k\sin(kx)\Big)\ .$$

Die Koeffizienten werden nun durch Vergleich mit der Anfangsbedingung durch Koeffizientenvergleich *bestimmt:*

$$u(x,0) = 1 + \sin 4x \stackrel{!}{=} \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(kx) \, ,$$

$$\Longrightarrow \; \frac{\tilde{a}_0}{2} = 1 \;\; , b_4 = 1 \;\; , \textit{Rest} = 0 \, .$$

Damit ist das Endergebnis

$$u(x,t) = e^{4t} + e^{-12t} \sin 4x \, .$$

Lösungsskizze 9

a)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \dfrac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 4 & \bullet & & & & & & \\ \bullet & & \bullet & \bullet & & & & \\ & \bullet & & & \bullet & & & \\ & \bullet & & & \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & & & \bullet & \\ & & & \bullet & & & \bullet & \\ & & & & \bullet & \bullet & & \bullet \\ & & & & & & \bullet & 4 \end{bmatrix} \end{array} = A_h \quad \text{mit } h = \frac{1}{5}$$

$\bullet \;\widehat{=}\; -1$

Nullelemente sind unterdrückt.

b) A_h ist symmetrisch

Anzahl der Subdiagonalen =

= Anzahl der Superdiagonalen = 2