A. Übungsaufgaben

A.1. Aufgaben zum Kapitel 4

A.1.1. Tutoraufgaben

Aufgabe 1 (Hausaufgabe Blatt 12) *Man löse das RAWP mit Hilfe des Ansatzes von d'Alembert*

$$
\begin{array}{lr}
(PDGL) & u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \;\; , 0 < x < \infty \, , t > 0, \\
(AB) & u(x,0) = f(x) \;\; , x \geq 0 \; , \\
 & u_t(x,0) = g(x) \;\; , x \geq 0 \; , \\
(RB) & u_x(0,t) = h(t) \;\; , t \geq 0 \; ,
\end{array}
$$

*wobei $f(\xi), g(\xi), h(\xi)$ **nur** für $\xi \geq 0$ definiert und dort hinreichend oft differenzierbar sind.*
HINWEIS:
Man bestimme zunächst mit den AB eine Lösung im Bestimmtheitsbereich $\mathcal{B}_I \equiv \{(x,t)\ , 0 \geq t \geq x\}$ und anschließend mit den RB und den Werten $u(t,t)\ , t \geq 0$ wiederum mit der Formel von d'Alembert eine Lösung in $\mathcal{B}_{II} \equiv \{(x,t)\ , 0 \geq x \geq t\}$, siehe Abb.A.1

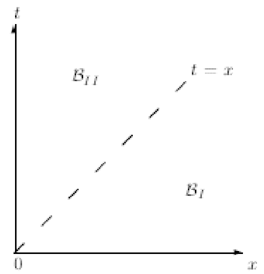

Abbildung A.1.: Bestimmtheitsbereiche $\mathcal{B}_{I,II}$.

Aufgabe 2 *Mittels Separationsansatz der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ löse man das RAWP (siehe Abb.A.2) zur Wellengleichung*

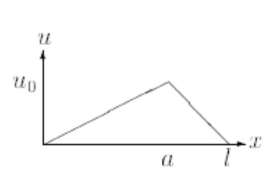

Abbildung A.2.: Anfangsbedingung $u_0(x)$

$$
\begin{aligned}
&(PDGL) && u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0\ ,\\
&(AB) && u(x,0) \equiv u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} u_0 & , x \in [0,a] \\ \frac{l-x}{l-a} u_u & , x \in \,]a,l] \end{cases}\\
& && u_t(x,0) \equiv u_1(x) = 0\ ,\\
&(RB) && u(0,t) = u(l,t) = 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 *Gegeben sei die lineare PDGL*

$$u_t = u_{xx} + 6u_x + 9u\ , x \in [0,\pi]\ ,\ t \geq 0\ .$$

Man bestimme alle linear unabhängigen Lösungen (Basislösungen) der Form

$$u(x,t) = f(x)g(t)\ ,\ \textit{(Separationsansatz)}$$

die den Randbedingungen $u(0,t) = 0$ *und* $u(\pi,t) = 0$ *für* $t \geq 0$ *genügen.*

Aufgabe 4 (Hausaufgabe Blatt 13)

a) *Zur numerischen Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in \Omega =]0,1[^2 \setminus]0,\frac{1}{2}]^2$$

$$\textit{mit Nullrandbedingung}\ \ u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

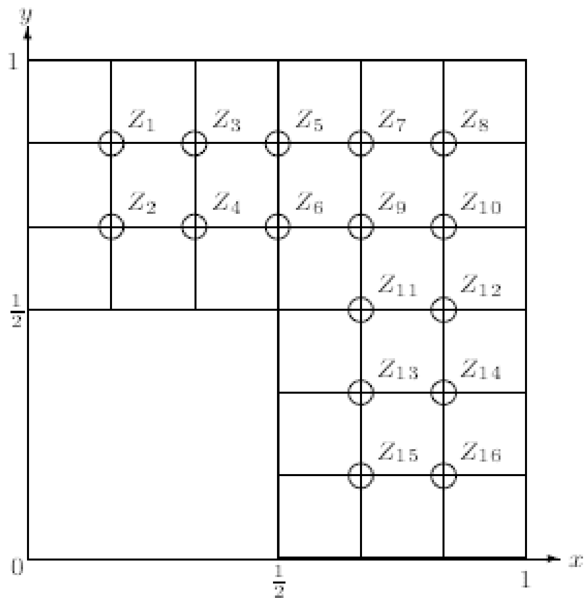

Abbildung A.3.: Diskretisierung von Ω.

wende man den 5-Punkte-Stern auf die vorgegebene äquidistante Diskretisierung (vgl. Abb.A.3) mit inneren Punkten $Z_1, \ldots, Z_{16}$ *an. Welche Form und Bandbreite hat die Sy-*

stemmatrix des resultierenden linearen Gleichungssystems

$$(A_h u_h(Z_j))_{j=1,\ldots,16} = (f(Z_j))_{j=1,\ldots,16} \text{ ?}$$

b) *Wie sieht die Matrix A_h mit der Diskretisierung aus a) für die Helmholtz-Gleichung*

$$-\Delta u(x,y) + u(x,y) = f(x,y)$$

auf dem Gebiet Ω mit Nullrandbedingung aus?

A.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

Aufgabe 5 *Man löse mit Hilfe des Lösungsansatzes von d'Alembert*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} \quad ,0 < x < \pi,\ \ t > 0\,, && \textit{(Wellengleichung)} \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} \quad ,0 \le x \le 4\,, && \textit{(Anfangsbedingung)} \\ u(2t,t) &= \sin t \quad ,0 \le t \le \frac{\pi}{4}\,, && \textit{(Bedingung entlang} \\ & && \textit{der Charakteristik } x = 2t\textit{).} \end{aligned}$$

Wo ist die Lösung definiert?

Aufgabe 6 *Man löse mit Hilfe des Lösungsansatzes von d'Alembert*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \quad ,0 < x < \frac{\pi}{2},\ \ t > 0\,, && \textit{(Wellengleichung)} \\ u_x(0,t) &= \sin t \quad ,0 \le t \le \pi\,, && \textit{(Randbedingung)} \\ u(t,t) &= 2\sin^2 t \quad ,0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,, && \textit{(Bedingung entlang} \\ & && \textit{der Charakteristik).} \end{aligned}$$

Wo ist die Lösung definiert?

Aufgabe 7 *Mittels Separationsansatz löse man*

a) $u_{xy} + yu_x - xu_y = 0$

b) $xu_{xy} - u_y - y = 0$

c) $u_{yy} + u_x \tan x = u$

Aufgabe 8 *Gegeben Sei die lineare PDGL*

$$u_t = u_{xx} + 4u \quad , x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,.$$

a) *Man bestimme alle Lösungen (Basislösungen) der Form*

$$u(x,t) = f(x)g(t)\,,$$

die der Periodizitätsbedingung $u(x+2\pi,t) = u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}, t > 0$ genügen.

b) *Durch den Ansatz als unendliche Linearkombination aus a) (Superposition) bestimme man eine 2π-periodische Lösung, die der Anfangsbedingung*

$$u(x,0) = 1 + \sin 4x \quad , x \in \mathbb{R} \, ,$$

genügt.

Aufgabe 9 *Zur numerischen Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \ , \ (x,y) \in \Omega \ ,$$
$$\Omega = \{(x,y), y < x < y+1, \ 0 < y < \frac{5}{3}\}$$
$$\textit{mit Nullrandbedingung } \ u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

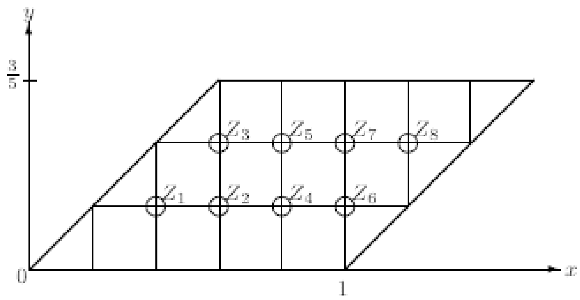

Abbildung A.4.: Diskretisierung von Ω.

wende man den 5-Punkte-Stern auf die vorgegebene äquidistante Diskretisierung (vgl. Abb.A.4) mit inneren Punkten $Z_1, \ldots, Z_8$ an.

a) *Man stelle die Systemmatrix A_h des resultierenden Gleichungssystems*

$$\left(A_h u_h(Z_j)\right)_{j=1,\ldots,8} = \left(f(Z_j)\right)_{j=1,\ldots,8} \quad \textit{auf.}$$

b) *Welche Struktur (Anzahl der Sub-, Superdiagonalen) hat A_h ?*