Zusatzaufgaben (RR'04/'05)

1) Man berechne das Volumen des Körpers

$$K := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le \ln\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \}$$

2) Seien $R>0$, $H>0$ und $\vec{v} = (xz, yz, xy)^T$

Man berechne

a) $\operatorname{rot} \vec{v}$ und $\operatorname{div} \vec{v}$

b) das Kurvenintegral $\int_\gamma \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle$ längs

$\gamma(t) := (R\cos t, R\sin t, Rt)^T \quad 0 \le t \le \pi/2$

c) $\int_Z \operatorname{div}(\vec{v})\, dx\, dy\, dz$ wobei

$$Z := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le R^2 \text{ und } 0 \le z \le H \}$$

d) das Oberflächenintegral $\int_M \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\, ds$

mit $M := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = R^2,\ 0 \le z \le H \}$

3) Die 2π-periodische Funktion f sei in $[-\pi, \pi]$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} t, & |t| < \pi/2 \\ t/2, & |t| = \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |t| \le \pi \end{cases}$$

a) Man skizziere f in $[-\pi, \pi]$. Welche der reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k der Fourierreihe von f sind sicher 0 und warum?

b) Man bestimme die reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k von f

4) $u(x,t)$ erfülle die lineare PDG (2. Ordnung) mit konstanten Koeffizienten

$$4u_{xx} + u_{tt} + 2u_t = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

a) Klassifizieren Sie den Typ der PDG.

b) Führen Sie die PDG mit Hilfe von

$$u(x,t) = f(x)\, g(t) \quad \text{(Separationsansatz)}$$

auf 2 gewöhnliche DGL bzgl. $f(x)$ und $g(t)$ über

c) Lösen Sie die DGL für $f(x)$.

d) Schränken Sie die Lösungen für f aus c) auf diejenigen ein, die den Randbedingungen

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

genügen und bestimmen Sie damit die Lösungen für $g(t)$ und somit für $u(x,t)$

e) Durch den Ansatz als unendliche Linear=kombination der Lösungen aus d) bestimme man eine Lösung $u(x,t)$, die der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n^2-1}} \cos(nx)$$

genügt

5) Man berechne das Volumen des Körpers

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq x \text{ und } x^2+y^2 \leq 1\}$$

6) Gegeben seien

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2yz \\ y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und } K := \{(x,y,z);\ 0 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$$

a) Man berechne rot $\vec{v}$ und div $\vec{v}$

b) $\vec{v}$ besitzt ein Potential $f(\vec{x})$ auf $\mathbb{R}^3$, warum?

c) Man berechne $\int_K \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x})\, dx\, dy\, dz$

d) Man berechne $\int_G \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle ds$ mit $\vec{n} = (0,0,-1)^T$ und $G = \{(x,y,0);\ x^2+y^2 = 1\}$. Man folgere daraus den Wert von

$$\int_M \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle ds \quad \text{mit } M = \{(x,y,z);\ 0 \leq z = 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$$

$\vec{n}$ ... äußeres Einheitsnormalenfeld

7) Die 2π-periodische Funktion f sei in $[-\pi, \pi]$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} \pi/2 - |t|, & |t| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

a) Man skizziere f in $[-\pi, \pi]$. Welche der reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k von f sind sicher 0? Warum?

b) Man bestimme die reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k von f.

8) $u(x,t)$ erfülle die PDG 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u_{xx} - u_t - 2u_x = 0 \qquad 0 < x < \pi \;, \quad t > 0$$

a) Man klassifiziere den Typ der PDG.

b) Man bestimme alle Lösungen der Form

$$u(x,t) = f(x)\, g(t)$$

c) Man schränke die Lösungen aus b) auf diejenigen ein, die den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \;, \quad t > 0$$

genügen.

d) Durch den Ansatz als unendliche Linear=kombination der Lösungen aus c) bestimme man eine Lösung $u(x,t)$, die der Anfangs=bedingung

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\, e^x \sin(nx)$$

genügt