A. Übungsaufgaben

A.1. Aufgaben zum Kapitel 3

A.1.1. Tutoraufgaben

(1) Komplexe Fourierreihe

Man berechne die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = |sinx| \tag{A.1}$$

(2) Reelle Fourierreihe

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = x \cdot cosx, \quad x \in [0..2\pi] \tag{A.2}$$

1. Welche der Fourierkoeffizienten sind auf jeden Fall gleich Null?
2. Berechnen Sie die Fourierreihe von $f(x)$!

(3) Reelle Fourierreihe einer abschnittsweise definierten Funktion

Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi}x^2 & x \in [0..\pi] \\ 2\pi - x & x \in [\pi..2\pi] \end{cases} \tag{A.3}$$

(4) Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = e^{-a|t|} \tag{A.4}$$

A.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

(1) Fourierreihe

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in [0..\pi] \\ \pi & x \in [\pi..2\pi] \end{cases} \tag{A.5}$$

1. Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von f.
2. Berechnen Sie mit den im Skript angegebenen Transformationsformeln 3.18 - 3.20 die komplexen Fourierkoeffizienten von f.
3. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch direkte Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten.

(2) Partielle Integration

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = x^3 \tag{A.6}$$

Bestimmen Sie die reellen und komplexen Fourierkoeffizienten.

(3) Fouriertransformation

Zeigen Sie: Die Funktion

$$f(t) = e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)} \tag{A.7}$$

ist - bis auf einen Vorfaktor - invariant unter Fouriertransformation.

(4) δ-Distribution

Man löse die Differentialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - g\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad E < 0 \tag{A.8}$$

und bestimme E. Zusätzlich gelte die Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 = 1$.

B. Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

B.1. Lösungen zum Kapitel 3

B.1.1. Tutoraufgaben

(1) Komplexe Fourierreihe

Die Fourierkoeffizienten sind:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |sinx| \, e^{-inx} dx \tag{B.1}$$

Mit $e^{-in(x-\pi)} = (-1)^n e^{-inx}$ folgt $c_n = 0$ für ungerades n.

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} sinx e^{-2kix} dx = && \text{(B.2)}\\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) e^{-2kix} dx = && \text{(B.3)}\\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{-i(2k-1)} e^{-i(2k-1)x} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{-i(2k+1)} e^{-i(2k+1)x} \Big|_0^{\pi} \right) && \text{(B.4)}\\
&= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} && \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

Also:

$$|sinx| = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kix}}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\pi} \left(2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos2kx}{k^2 - \frac{1}{4}} \right) \tag{B.6}$$

(2) Reelle Fourierreihe

1. $f(x)$ ist eine ungerade Funktion, da $cos(x)$ eine gerade und $f(x) = x$ eine ungerade Funktion ist. Daher sind die Fourierkoeffizienten a_k und a_0 gleich Null.

2. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten b_k:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx = && \text{(B.7)}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xcos(x)sin(kx)dx = && \text{(B.8)}\\
&= \frac{1}{\pi}\left.\frac{sin((1+k)x)-(1+k)xcos((1+k)x)}{2(1+k)^2}\right|_0^{2\pi} + && \text{(B.9)}\\
&\quad + \frac{1}{\pi}\left.\frac{sin((-1+k)x)-(-1+k)xcos((-1+k)x)}{2(-1+k)^2}\right|_0^{2\pi} && \text{(B.10)}\\
&= -\frac{2k}{k^2-1} && \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2k}{k^2-1} sin(kx) \qquad \text{(B.12)}$$

(3) Reelle Fourierreihe einer abschnittsweise definierten Funktion

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)dx = && \text{(B.13)}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi}cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)cos(kx)dx = && \text{(B.14)}\\
&= \frac{2\cdot(-1)^k}{\pi k^2} + \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = && \text{(B.15)}\\
&= \frac{3\cdot(-1)^k - 1}{\pi k^2} && \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx = && \text{(B.17)}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi}sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)sin(kx)dx = && \text{(B.18)}\\
&= \frac{2 + 2\cdot(-1)^{k-1} + k^2\cdot(-1)^k\pi^2}{\pi^2 k^3} + \frac{(-1)^k}{k} = && \text{(B.19)}\\
&= 2\frac{1 + (-1)^{1+k} + \pi^2\cdot(-1)^k k^2}{\pi^2 k^3} && \text{(B.20)}
\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \tag{B.21}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)dx = \tag{B.22}$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{3} = \tag{B.23}$$
$$= \frac{8\pi}{3} \tag{B.24}$$

(4) Fouriertransformation

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-a|t|}dt = \tag{B.25}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(a-i\omega)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{t(-a-i\omega)}dt = \tag{B.26}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{a-i\omega}e^{t(a-i\omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-a-i\omega}e^{t(-a-i\omega)}\right]_0^{\infty} = \tag{B.27}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right) = \tag{B.28}$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2-\omega^2} \tag{B.29}$$

B.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

(1) Fourierreihe

1. Berechnung der reellen Koeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)dx = \tag{B.30}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi cos(kx)dx = \tag{B.31}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{cos(kx)+kxsin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\pi sin(kx)\right]_{\pi}^{2\pi} = \tag{B.32}$$
$$= \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2} + 0 \tag{B.33}$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx = && \text{(B.34)}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xsin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \pi sin(kx)dx = && \text{(B.35)}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(kx) - kxcos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\left[-\pi cos(kx)\right]_\pi^{2\pi} = && \text{(B.36)}\\
&= -\frac{(-1)^k}{k} + \frac{-1+(-1)^k}{k} = && \text{(B.37)}\\
&= \frac{-1}{k} && \text{(B.38)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\pi + \pi = && \text{(B.39)}\\
&= \frac{3\pi}{2} && \text{(B.40)}
\end{aligned}
$$

2. Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten mittels der im Skript angegebenen Formeln:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{3\pi}{4} && \text{(B.41)}\\
c_k &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}\right) - i\left(\frac{-1}{k}\right)\right] && \text{(B.42)}\\
c_{-k} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}\right) + i\left(\frac{-1}{k}\right)\right] && \text{(B.43)}\\
& && \text{(B.44)}
\end{aligned}
$$

3. Direkte Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx && \text{(B.45)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xe^{-ikx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \pi e^{-ikx}dx && \text{(B.46)}\\
&= \left[-\frac{-ikxe^{-ikx} - e^{-ikx}}{2\pi k^2}\right]_0^\pi + \left[\frac{ie^{-ikx}}{2k}\right]_\pi^{2\pi} && \text{(B.47)}\\
&= \frac{-1+(-1)^k}{2\pi k^2} + i\frac{1}{2k} && \text{(B.48)}
\end{aligned}
$$

Ergebnis stimmt überein mit 2..

(2) Partielle Integration

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)dx = && \text{(B.49)}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^3 cos(kx)dx = && \text{(B.50)}\\
&= \left[\frac{k^3x^3sin(kx)+3k^2x^2cos(kx)-6cos(kx)-6kxsin(kx)}{\pi k^4}\right]_0^{2\pi} = && \text{(B.51)}\\
&= \frac{12\pi}{k^2} && \text{(B.52)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx = && \text{(B.53)}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^3 sin(kx)dx = && \text{(B.54)}\\
&= \left[\frac{-k^3x^3cos(kx)+3k^2x^2sin(kx)-6sin(kx)+6kxcos(kx)}{\pi k^4}\right]_0^{2\pi} = && \text{(B.55)}\\
&= -\frac{-12+8k^2\pi^2}{k^3} && \text{(B.56)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = && \text{(B.57)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^3 e^{-ikx}dx = && \text{(B.58)}\\
&= \left[\frac{ik^3x^3e^{-ikx}+3k^2x^2e^{-ikx}-6ie^{-ikx}kx-6e^{-ikx}}{2\pi k^4}\right]_0^{2\pi} = && \text{(B.59)}\\
&= \frac{4ik^2\pi^2+6\pi k-6i}{k^3} && \text{(B.60)}
\end{aligned}
$$

(3) Fouriertransformation

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-\frac{1}{2}x^2}dt = \quad \text{(B.61)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2i\omega t+t^2)}dt \quad \text{(B.62)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\omega)^2-\frac{1}{2}\omega^2}dt \quad \text{(B.63)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\omega)^2}dt}_{=\sqrt{2\pi}} \quad \text{(B.64)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}. \quad \text{(B.65)}$$

(4) δ-Distribution

Sei $\phi(k)$ die Fouriertransformierte von $\psi(x)$.

Dann gilt nach Fouriertransformation:

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2\phi(k) - \frac{g}{2\pi}\psi(0) = E\phi(k) \quad \text{(B.66)}$$

$$\phi(k) = \frac{2mg\psi(0)}{\hbar^2\cdot 2\pi}\cdot\frac{1}{k^2+\underbrace{\left(-\frac{2mE}{\hbar^2}\right)}_{\alpha^2}} \quad \text{(B.67)}$$

$$\psi(x) = \frac{mg\psi(0)}{\hbar^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+\alpha^2}dk \overset{\text{vgl. A.1.1 (4)}}{=} \frac{mg\psi(0)}{\hbar^2\alpha}e^{-\alpha|x|} \quad \text{(B.68)}$$

$$1 = \frac{mg}{\hbar^2\alpha} \Longrightarrow E = -\frac{mg}{2\hbar^2} \quad \text{(B.69)}$$

$$\psi(x) = \psi(0)e^{-\alpha|x|} \quad \text{(B.70)}$$

$$1 = \psi(0)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|x|}dx = 2\psi(0)^2\frac{1}{2\alpha} \quad \text{(B.71)}$$

$$\psi(0) = \sqrt{\alpha} \quad \text{(B.72)}$$

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{mg}}{\hbar}e^{-\frac{mg}{\hbar^2}|x|} \quad \text{(B.73)}$$