1 Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

1.1 Lösungen zu den Aufgaben zum Kapitel 2

1.1.1 Tutoraufgaben

1. Man stellt fest: $0 < f(x,y) < 1 \ \forall (x,y) \in G$. Somit ist f beschränkt auf G

   a) Da f auf G beschränkt, ist f auf G Riemann-Integrabel

   b) $\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{1}{x} \cdot \cos(xy)dy \right) dx = \int\limits_1^3 \left[-\sin(xy)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} dx$
   $= -\int\limits_1^3 \left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right) = -\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right]_1^3$
   $= - \ \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

2. $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -R < x < R, -\sqrt{R^2-x^2} < y < \sqrt{R^2-x^2}\right\}$

   a) $\iint_G \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{-R}^{R} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy \right) dx = \int\limits_{-R}^{R} \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$

   $$= \frac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R} \left[\ln(x^2+R^2-x^2) - \ln(x^2+R^2-x^2)\right] dx = 0$$

   b) $\iint_G \frac{r\sin(\phi)}{r^2} r\,drd\varphi = \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} \sin(\varphi)d\varphi \right) dr = 0$

3. Wir müssen das Volumen der herausgestochenen Zylinder berechnen. Aus Symmetriegründen genügt es, das Volumen eines halben Zylinders auszurechnen. Das herausgestochene Volumen beträgt dann das Vierfache. Wir berechnen das Volumen des Zylinders $(x-\frac{r}{2})^2 + y^2 \leq \left(\frac{r}{2}\right)^2$ zwischen der x-y-Ebene und der Kugel. Die Grundfläche des Zylinders ist ein Gebiet vom Typ II: $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < r, -\sqrt{x(r-x)} < y < \sqrt{x(r-x)}\right\}$. Die Funktion, über die wir integrieren müssen, muss die Oberfläche der Kugel beschreiben, d.h. $f(x,y) = z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Somit

$$V_{hZ} = \iint_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{-\sqrt{x(r-x)}}^{\sqrt{x(r-x)}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy \right) dx =$$

$$... = r^3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9} \right)$$

Nun berechnen wir das Volumen des gleichen Körpers im $\mathbb{R}^3$. Dazu müssen wir über das Volumen des Körpers die 1-Funktion integrieren. Der Körper ist hierbei

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < r, -\sqrt{x(r-x)} < y < \sqrt{x(r-x)}, 0 < z < \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

. Die Integration in kartesischen Koordinaten würde nach der Integration über z auf das Gleiche wie oben führen. Wir führen nun neue Koordinaten ein

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \psi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix hiervon ist

$$J_\psi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Jacobideterminante $|J_\psi| = \rho\cos^2(\varphi) + \rho\sin^2(\varphi) = \rho$. Wir überlegen uns noch die Grenze für z in den neuen Koordinaten: $z < \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - \rho^2\sin^2(\varphi) - \rho^2\cos^2(\varphi)} = \sqrt{r^2 - \rho^2}$. Wie man sich anhand einer Skizze schnell klarmacht, ist das Integrationsgebiet in den neuen Koordinaten

$$H = \left\{ (\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho < r\cos(\varphi), -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < z < \sqrt{r^2 - \rho^2} \right\}$$

Nun gilt nach dem Transformationssatz:

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_H f(\psi(x, y, z))\ |J_\psi|\ d\rho d\varphi dz$$

f ist aber, wie oben schon gesagt, die 1-Funktion. Somit ist

$$V_{hZ} = \iiint_H f\ |J_\psi|\, d\rho d\varphi dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{r\cos(\varphi)} \left(\int\limits_0^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho\, dz \right) d\rho \right) d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{r\cos(\varphi)} \rho\sqrt{r^2 - \rho^2}\, d\rho \right) d\varphi = - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} \left(r^2 - \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{r\cos(\varphi)} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 - r^2\cos^2(\varphi) \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi + \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi = -\frac{1}{3} r^3 \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin^3(\varphi) \right| d\varphi + \frac{\pi}{3} r^3$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$$

wie oben. Das Volumen des Restkörpers ist somit $V = V_K - 4 \cdot V_{hZ} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{15}{9} r^3 = \frac{16}{9} r^3$. Wie man feststellt, kommt die Zahl π nicht mehr vor.

4. Wir parametrisieren die Oberfläche der Kugel durch

$$\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \Sigma(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ \sqrt{r^2-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Nun ist ein Achtel der herausgeschnittenen Oberfläche $S = \Sigma(M)$ mit $M = \left\{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < r\cos(\varphi)\right\}$. Man berechnet nun

$$\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Sigma_\rho \times \Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2\cos(\varphi)}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \\ \frac{\rho^2\sin(\varphi)}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \\ \rho\sin^2(\varphi)\rho\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ \sqrt{r^2-\rho^2} \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\Sigma(\rho,\varphi)$$

Somit ist das Oberflächenelement

$$d\omega = \left\| \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ \sqrt{r^2-\rho^2} \end{pmatrix} \right\| d\rho d\varphi = \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \sqrt{\rho^2\cos^2(\varphi)+\rho^2\sin^2(\varphi)+r^2-\rho^2}\, d\rho d\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 \ldots}}$$

Also berechnet sich die gesuchte Oberfläche zu

$$8\iint_S d\omega = 8r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{r\cos(\varphi)} \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} d\rho \right) d\varphi$$

$$= 8r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{r^2-\rho^2} \right]_0^{r\cos(\varphi)} d\varphi = 8r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{r^2 - r^2\cos^2(\varphi)} + r \right) d\varphi$$

$$= 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin(\varphi) + 1 \right) d\varphi = 8r^2 \left[\cos(\varphi) + \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8r^2 \left(-1 + \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi r^2 - 8r^2$$

Anmerkung: Die Fläche der verbleibenden Teile der Kugel beträgt $4\pi r^2 - 4\pi r^2 + 8r^2 = 8r^2$. Auch hier kommt, wie schon in Aufgabe 3, die Zahl π nicht mehr vor. Den durch die Wegnahme der Zylinder entstehenden Körper nennt man Viviani-Körper und seine Fläche Viviani-Fenster.

5. Wir benutzen elliptische Koordinaten

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} a \cdot r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ b \cdot r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ c \cdot r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

mit $H = \{(r,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \vartheta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$. Man sieht, dass $\psi(H) = B$.

Man erhält für die Jacobi-Matrix

$$J_\psi = \begin{pmatrix} a\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & ar\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -ar\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ b\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & br\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & br\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ c\cos(\vartheta) & -cr\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Jacobi-Determinante $|J_\psi| = abcr^2\sin(\vartheta)$. Somit ist

$$V_B = \iiint_B 1\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} abcr^2\sin(\vartheta)\,d\varphi\right) d\vartheta\right) dr$$

$$= abc\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}\int_0^\pi \sin(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{2\pi}{3}abc\,[-\cos(\vartheta)]_0^\pi = \frac{4\pi}{3}abc$$

Und weiterhin

$$\iiint_B x^2\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} a^3bcr^4\sin^3(\vartheta)\cos^2(\varphi)\,d\varphi\right) d\vartheta\right) dr$$

$$= \frac{1}{5}a^3bc\cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\varphi)+\varphi\right)\right]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}\cos^3(\vartheta)-\cos(\vartheta)\right]_0^\pi = \frac{1}{5}a^3bc\cdot\pi\cdot\left(-\frac{2}{3}+2\right) = \frac{4\pi}{15}a^3bc$$

6. Der Satz von Green besagt, dass $\iint_G (\partial_x g_2 - \partial_y g_1)\,dxdy = \oint_{\partial G} < g(x,y), d\vec{x} >$.

   a) Wir stellen fest, dass $y^2 = \frac{\partial}{\partial x}y^2x$. Somit setzen wir $g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2x \end{pmatrix}$ und erhalten mit dem Satz von Green:

   $$\iint_K y^2 = \oint_{\partial K} < \begin{pmatrix} 0 \\ y^2x \end{pmatrix}, d\vec{x} >$$

   Wir parametrisieren also den Kreis: $\lambda : [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (R\cos(t), R\sin(t))^T$. Dann ist $\dot\lambda = (-R\sin(t), R\cos(t))^T$. Damit ist

   $$\oint_{\partial K} < \begin{pmatrix} 0 \\ y^2x \end{pmatrix}, d\vec{x} >= \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} 0 \\ (R\sin(t))^2R\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} > dt$$

   $$= \int_0^{2\pi} R^4\cos^2(t)\sin^2(t)dt = R^4\left[\frac{1}{16}\left(2x - \frac{1}{2}\sin(4x)\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}R^4$$

   b) Wir stellen fest, dass $x^2+y^2 = \frac{\partial}{\partial y}x^2y + \frac{\partial}{\partial x}y^2x$. Somit setzen wir $g(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2y \\ y^2x \end{pmatrix}$ und erhalten mit dem Satz von Green und der gleichen Parametrisierung wie in (a):

   $$\iint_K (x^2+y^2)\,dxdy = \oint_{\partial K} < \begin{pmatrix} -x^2y \\ y^2x \end{pmatrix}, d\vec{x} >$$

   $$= \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} -R^2\cos^2(t)R\sin(t) \\ R^2\sin^2(t)R\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} > dt$$

$$= 2R^4 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}R^4$$

7. Laut dem Satz von Gauss gilt $\iiint_G \operatorname{div} F(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\partial G} < F(x,y,z), \vec{n} >$. In unserem Fall ist $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 2, x^2 - 1 < y < 3, 0 < z < 1\}$. Somit ist

$$\iint_{\partial G} < F(x,y,z), \vec{n} >= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2-1}^3 \left(\int\limits_0^1 \operatorname{div} F(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2-1}^3 \left(\int\limits_0^1 (2x + xz)\,dz \right) dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2-1}^3 \left[2xz + \frac{1}{2}xz^2 \right]_{z=0}^1 dy \right) dx$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2-1}^3 \left(2x + \frac{1}{2}x \right) dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left[2xy + \frac{1}{2}xy \right]_{x^2-1}^3 dx$$

$$= \int\limits_0^2 \left(6x + \frac{3}{2}x - 2x^3 + 2x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right) dx = \int\limits_0^2 \left(10x - \frac{5}{2}x^3 \right) dx$$

$$= \left[5x^2 - \frac{5}{8}x^4 \right]_0^2 = 20 - 10 = 10$$

8. Der Satz von Stokes besagt

$$\iint_S < \operatorname{rot} F, \vec{n} > d\omega = \oint_{\text{Rand } S} < F, \vec{x} >$$

Wir berechnen zunächst $\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Parametrisierung von S verwenden wir

$$\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\Sigma_x \times \Sigma_y = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Integrationsgebiet ist $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |x| < 1\}$ mit $\Sigma(M) = S$. Somit ist

$$\int_{\text{Rand } S} < F, \vec{x} >= \iint_S < \operatorname{rot} F, \vec{n} > d\omega = \int\limits_{-1}^1 \left(\int\limits_{-1}^1 < \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} > dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (-2x)\, dx \right) dy = 0$$

1.1.2 Aufgaben zum eigenständigen Üben

1. $\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^7 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} x^2 \cos(y)\, dy \right) dx = \int\limits_0^7 [x^2 \sin(y)]_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^7 = \frac{343}{3\sqrt{2}}$

2. Der gegebene Bereich ist vom Typ II: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 + x^2\}$. Somit ist

$$\iint_A (x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1+x^2} (x^2+y^2) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}(1+x^2)^3 \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} + x^2 + x^4 + \frac{1}{3}x^6 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{21}x^7 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x \right]_0^1 = \frac{131}{105}$$

3. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Nach Satz von Green gilt:

$$F = \iint_{\text{Astroide}} 1\, dxdy = \oint_\gamma < g(x,y), \vec{x} >$$

Die Parametrisierung der Astroide war schon gegeben, wir brauchen nur noch $\dot{\gamma} = R(-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))^T$ und berechnen damit

$$\oint_\gamma < g(x,y), \vec{x} > = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos^3(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3R\cos^2(t)\sin(t) \\ 3R\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} > dt$$

$$= 3R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^4(t)\, dt = \frac{3\pi}{8}R^2$$

Anmerkung: Die Integration lässt sich entweder durch mehrmalige partielle Integration oder durch die Formeln für den doppelten Winkel durchführen.

4. Man erhält:

   a) Man beschreibt C durch C_i, $i = 1..4$ die Kanten des Quadrats. Dann ist $\gamma_i : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_1(t) = (1,t)^T$, $\gamma_2(t) = (-t,1)^T$, $\gamma_3 = (-1,-t)^T$ und $\gamma_4(t) = (t,-1)^T$. Dazu berechnet man $\dot{\gamma}_1 = (0,1)^T$, $\dot{\gamma}_2 = (-1,0)^T$, $\dot{\gamma}_3 = (0,-1)^T$, $\dot{\gamma}_4 = (1,0)^T$. Somit

$$\int_C < \begin{pmatrix} \exp(xy) \\ xy^2 \end{pmatrix}, d\vec{x} > = \int_{-1}^1 t^2\, dt - \int_{-1}^1 \exp(-t)\, dt + \int_{-1}^1 t^2\, dt + \int_{-1}^1 \exp(-t)$$

$$2\int_{-1}^{1} t^2\,dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

b) Nach Satz von Green gilt $\iint_G (\partial_x g_2 - \partial_y g_1)\,dxdy = \oint_{\partial G} < g(x,y), d\vec{x} >$. Somit gilt

$$\int_C < F(x,y), d\vec{x} >= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(y^2 - x\exp(xy)\right)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}y^3 - \exp(xy)\right]_{-1}^{1} dx$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3} - \exp(x) + \exp(-x)\right)dx = \left[\frac{2}{3}x - \exp(x) - \exp(-x)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{4}{3} - \exp(1) + \exp(-1) - \exp(-1) + \exp(1) = \frac{4}{3}$$

5. Wir nehmen an, der Stil des Glases liege auf der z-Achse und das obere Ende liege am Koordinatenursprung. Nun benutzen wir Zylinderkoordinaten

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \psi(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Wie in Aufgabe 3 der Zentralübung gezeigt, ist die Funktionaldeterminante $J_\psi = \rho$. Integrieren müssen wir über $H = \left\{(\rho,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho < \sqrt{2h}, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < h\right\}$. Somit ist:

$$V = \iiint_{Glas} 1\,dxdydz = \int_0^h\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2h}} \rho\,d\rho\right)d\varphi\right)dz = \int_0^h\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{2h}} d\varphi\right)dz$$

$$= 2\pi\int_0^h h\,dz = 2\pi h^2$$

Somit muss der Eichstrich bei $h = \sqrt{\frac{V}{2\pi}} \approx 6.3$ cm angebracht werden. Um die Oberfläche zu berechnen, parametrisieren wir die Oberfläche des Glases durch

$$\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \Sigma(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ \frac{1}{2}r^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für das Oberflächenelement

$$d\omega = \|\Sigma_r \times \Sigma_\varphi\| = \left\| \begin{pmatrix} -r^2\cos(\varphi) \\ -r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \right\| = r\sqrt{r^2+1}$$

Integrieren muss man über $M = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \sqrt{6h}, 0 < \varphi < 2\pi\right\}$ mit $\Sigma(M) = \partial$Glas. Also

$$F(\text{Glas}) = \iint_M \|\Sigma_r \times \Sigma_\varphi\| \, dr d\varphi = \int\limits_0^{\sqrt{6h}} \left(\int\limits_0^{2\pi} r\sqrt{r^2+1} \, d\varphi \right) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3} \left(r^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{6h}} = \frac{2\pi}{3}(6h+1)^{\frac{3}{2}} \approx 506.18 \text{ cm}^3$$

6. Um die angegebene Oberfläche zu parametrisieren, benutzen wir Polarkoordinaten und parametrisieren

$$\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; \Sigma(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 2+r^2 \end{pmatrix}$$

Daraus berechnen wir

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus wiederum

$$\Sigma_r \times \Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}$$

Dadurch erhält man für das Oberflächenelement $d\omega = \|\Sigma_r \times \Sigma_\varphi\| \, dr d\varphi = \sqrt{4r^4+r^2} = r\sqrt{4r^2+1}$. Der Bereich, über den wir Integrieren müssen, ist $M = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$, mit $\Sigma(M) = S$. Also ist

$$F(S) = \iint_S 1 \, d\omega = \iint_M \|\Sigma_r \times \Sigma_\varphi\| \, dr d\varphi = \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1} \, d\varphi \right) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{\pi}{6}(4R^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

7. Der Satz von Stokes besagt

$$\iint_S < \text{rot}\, F, \vec{n} > d\omega = \oint_{\text{Rand } S} < F, \vec{x} >$$

Wir berechnen zunächst $\text{rot}\, F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} xz-1 \\ -yz \\ -1 \end{pmatrix}$. Für die Parametrisierung von S verwenden wir

$$\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; \Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+2y^2 \end{pmatrix}$$

mit $\Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$ und $\Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4y \end{pmatrix}$. Damit ist $\Sigma_x \times \Sigma_y = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Integrationsgebiet ist $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |x| < 1\}$ mit $\Sigma(M) = S$. Somit ist

$$\int_{\text{Rand } S} < F, \vec{x} >= \iint_S < \operatorname{rot} F, \vec{n} > d\omega = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} < \begin{pmatrix} x(x^2+2y^2)-1 \\ -y(x^2+2y^2) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \\ 1 \end{pmatrix} > dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(-2x^4 - 4x^2y^2 + 2x + 4x^2y^2 - 8y^4 - 1 \right) dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(-2x^4 + 2x - 8y^4 - 1) \right) dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{2}{5}x^5 + x^2 - 8y^4x - x \right]_{-1}^{1} dy = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{14}{5} - 16y^4 \right) dy = -\frac{28}{5}$$