A. Übungsaufgaben

A.1. Aufgaben zum Kapitel 2

A.1.1. Tutoraufgaben

1. Integration über ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$: Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3 \wedge \frac{3}{2}\pi < y < \frac{5}{2}\pi\} \subseteq \mathbb{R}$ und $f : G \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \cos(xy)$.
   a) Ist f auf G Riemann-Integrabel? Begründung?
   b) man berechne $\iint_G f(x,y)\,dxdy$
2. Für $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ berechne man jeweils in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten $\iint_G \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$.
3. Aus der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ im $\mathbb{R}^3$ werden die Durchschnitte mit den beiden Zylindern $(x+\frac{r}{2})^2+y^2 \leq \left(\frac{r}{2}\right)^2$ und $(x-\frac{r}{2})^2+y^2 \leq \left(\frac{r}{2}\right)^2$ entfernt. Wie gross ist das Volumen des resultierenden Körpers? Berechnen Sie das Volumen sowohl durch Integrieren über kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ als auch über geeignete Koordinaten im $\mathbb{R}^3$.
4. Welche Fläche wurde von der Kugeloberfläche der Kugel aus Aufgabe 3 entfernt?
5. Man berechne das Volumen des Ellipsoids $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$und das Integral $\iiint_B x^2\,dxdydz$. Man passe hiezu die Kugelkoordinaten geeignet an.
6. Unter Verwendung des Satz von Greens berechne man auf der Kreisscheiben mit Radius R um den Nullpunkt folgendes:
   a) Das Flächenträgheitsmoment $M_{y,2} = \iint_K y^2\,dxdy$
   b) Das polare Flächenträgheitsmoment $I_p = \iint_K (x^2+y^2)\,dxdy$
7. Man berechne mittels Satz von Gauss den Fluss von $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ xyz \\ \cos(y) \end{pmatrix}$ durch den Rand des von der y-Achse, der Gerade $y = 3$ und der Funktion $y = x^2 - 1$ bei $z = 0$ und $z = 1$ beschränkten Gebietes.
8. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y+z \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1; |y| < 1, z = x^2+y^2\}$. Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes $\int_{\text{Rand } S} < F, \vec{x} >$.

A.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

1. Für $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 7, \frac{\pi}{4} < y < 2\pi\right\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2\cos(y)$ berechne man $\iint_G f(x,y)\,dxdy$.

2. Man bestimme $\iint_A (x^2 + y^2)\, dxdy$ wenn A der von der Funktion $x \mapsto 1 + x^2$, den Geraden $x = 1$, $x = 0$ und der x-Achse umschriebene Bereich ist.

3. Unter Verwendung des Satzes von Green berechne man den Flächeninhalt des von der Astroide $\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto R(\sin^3(t), \cos^3(t))^T$ begrenzten Bereiches.

4. Man berechne $\int_C < F(x, y), d\vec{x} >$ für $F(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(xy) \\ xy^2 \end{pmatrix}$ und C der gegen den Uhrzeigersinn umlaufenen Rand des Quadrats mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$:

   a) direkt

   b) mit dem Satz von Green

5. Ein durch den Stiel drehsymmetrisches Weinglas habe die Schnittkurve $z = \frac{1}{2}x^2$ cm mit der x-z-Ebene. In welcher Höhe über dem Stil muss der Strich angebracht werden, damit das Glas 0.25 l fasst? Wie gross ist die Oberfläche des Glases, wenn der Kelch 3 mal höher ist als der Strich?

6. Man berechne die Oberfläche von $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, z = 2 + x^2 + y^2\}$

7. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y + z \\ xyz \end{pmatrix}$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1; |y| < 1, z = x^2 + 2y^2\}$. Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes $\int_{\text{Rand } S} < F, \vec{x} >$.