Höhere Mathematik III
für Maschinenwesen und CIW

WS 03/04

(Prof. Dr. Peter Rentrop, Konrad Penzkofer)

Blatt 9

Zentralübung

1. Sind y_1 und y_2 spezielle Lösungen von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,,$$

dann ist $y_s := y_1 + y_2$ eine spezielle Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) + f_2(x).$$

2. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\varphi(x) := e^{\lambda x}$ eine Lösung von

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

mit reellen, konstanten Koefizienten. Dann sind Re φ und Im φ linear unabhängige Lösungen der DGL.

3. Man berechne alle reellen Lösungen von

$$y'' + 2y' + 5y = x + e^{-x}\cos 2x$$

4. Man berechne e^{At} für $A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Tutorübung

5. Man bestimme alle reellen Lösungen von

   (a) $y'' + y = xe^{-x} + \sin x + \dfrac{1}{\sin^2 x}$,

   (b) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$.

6. Man berechne e^{At} für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Man überprüfe, daß $e^{At}\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$, allgemeine Lösung von $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ ist.

Hausaufgaben

7. Man berechne alle reellen Lösungen von

   (a) $y'' - y = x \sinh x - \dfrac{1}{1+e^x}$,

   (b) $y'' + 2y' + 2y = x^2 + e^x \cos x$,

   (c) $y'' + 5y' + 4y = \cosh x$.

8. Man berechne e^{At} für a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

   und überprüfe, daß dies jeweils Lösung von $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ ist.

9. Man löse das AWP

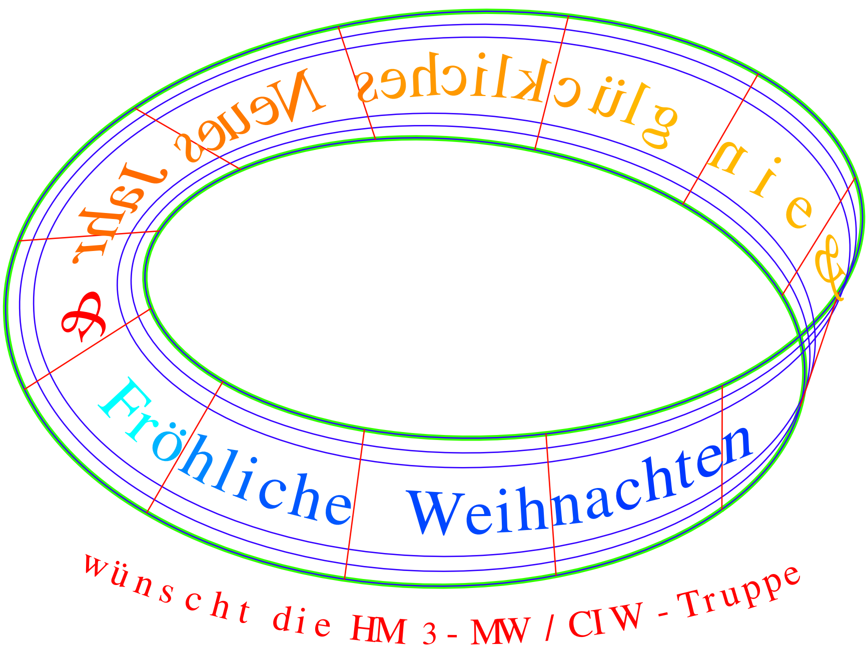
$$x^2 y'' + 3xy' + 2y = 2 \ln x \,, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1 \,.$$

   Hinweis: Substitution $x = e^t$.

Hinweise

- **Zentralübung:** Do 15:15 - 16 Uhr in MW 0001
- **Tutorübungen:**

Fr.	10:15 - 11:45	MW 1050
		MW 2050
		MW 1450
Fr.	12:15 - 13:45	MW 2050
		MW 0350
Mo.	08:30 - 10:00	MW 1050
Di.	12:15 - 13:45	entfällt am 23. 12. 03



Höhere Mathematik III
für Maschinenwesen und CIW

WS 03/04

(Prof. Dr. Peter Rentrop, Konrad Penzkofer)

Blatt 10

Zentralübung

1. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, daß $(3,\ 0,\ 1)^T$, $(0,\ 3,\ 2)^T$ und $(-1,\ -2,\ 1)^T$ EV von A sind (siehe HM2, Bl. 8,4.c)).
Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

Welche Lösungen sind für $t \geq 0$ beschränkt?

2. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, daß $\boldsymbol{v}_1 := (-1,\ -1,\ 1)^T$ ein EV von A ist und $(1,\ 0,\ 0)^T$ und $(1,\ -1,\ 0)^T$ HV von $\boldsymbol{v}_1$ 1. bzw. 2. Stufe sind (siehe HM2, Bl. 9,5.)).
Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

3. Von der DGL

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - 2\delta\dot{\boldsymbol{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \kappa \cos\omega t\,,\ 0 < \delta < 1\,,$$

bestimme man eine spezielle Lösung mit Hilfe eines Ansatzes $\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{a}e^{i\omega t}$ sowie die allgemeine Lösung der homogenen DGL mit einem Ansatz $\boldsymbol{v}e^{\mu t}$.

Tutorübung

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, daß $\boldsymbol{v}_1 := (1,\ 0,\ 1)^T$, $\boldsymbol{v}_2 := (-1,\ -i,\ 1)^T$ und $\overline{\boldsymbol{v}_2}$ EV von A sind (siehe HM2, Bl.9, 6.).
Man bestimme die allgemeine reelle Lösung von

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

5. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, daß $\boldsymbol{v}_1 := (1,\ 2,\ -1)^T$ ein EV von A ist, $(\frac{1}{2},\ 0,\ 0)^T$ HV von $\boldsymbol{v}_1$ 1. Stufe und $(0,\ 0,\ 1)^T$ ein EV ist (siehe HM2, Bl. 9,1.b)).
Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

6. Zwei identische Pendel (Masse $= m$, Länge $= l$) sind über eine Feder (Federkonstante $=k$) gekoppelt. Bei kleinen Ausschlägen ($x(t) \approx \sin(x(t))$, $y(t) \approx \sin(y(t))$) der Pendel gilt

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha x - \beta(x-y), \quad \alpha := \frac{g}{l},\ \beta := \frac{k}{m},\ \alpha,\ \beta > 0 \\ \ddot{y} &= -\alpha y + \beta(x-y) \end{aligned}$$

Anfangswerte: $x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0.$
Man löse dieses AWP mit Hilfe von EW und EV. Wie lautet das äquivalente DGL-System 1. Ordnung?

Hausaufgaben

7. Man berechne die allgemeine reelle Lösung des DGL-Systems

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \quad \text{für} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit Hilfe von EW und EV.}$$

8. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, daß $\boldsymbol{v}_1 := (-1,\, 0,\, 1)^T$ ein EV von A ist, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0)^T$ HV von $\boldsymbol{v}_1$ 1. Stufe und $(-3,\, -2,\, 1)^T$ ein EV ist (siehe HM2, Bl.8, 7.).
Man bestimme die allgemeine Lösung von $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$.

9. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, daß $\boldsymbol{v}_1 := (-1,\, 1,\, 1)^T$ ein EV von A ist und $(1,\, 0,\, 0)^T$ und $(1,\, -1,\, 0)^T$ HV von $\boldsymbol{v}_1$ 1. bzw. 2. Stufe sind (siehe HM2, Bl. 9,1.a)).
Man bestimme die allgemeine Lösung von $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$.

10. $\ddot{x} = 0$ und $\ddot{y} = 0$ sind die Bewegungsgleichungen eines kräftefreien Massenpunktes in einem ortsfesten Koordinatensystem ("Inertialsystem").
Wenn sich dagegen das Koordinatensystem mit konstanter Kreisfrequenz ω um den Ursprung dreht, dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \quad \text{und} \quad \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x} \tag{1}$$

$\omega^2 \cdot (x,\, y)^T$ heißt *Zentrifugalkraft*, $2\omega \cdot (\dot{y},\, -\dot{x})^T$ heißt *Coriolis-Kraft.*

(a) Man gebe die 4×4-Matrix A an, so daß für

$$\boldsymbol{u} := (x,\, y,\, \dot{x},\, \dot{y})^T \quad \text{gilt} \quad \dot{\boldsymbol{u}} = A\boldsymbol{u}.$$

(b) Man verifiziere, daß $(1,\, \pm i,\, \pm i\omega,\, -\omega)^T$ EV von A sind und $(0,\, 0,\, 1,\, \pm i)^T$ HV 1. Stufe sind.
Man bestimme damit $x(t)$ und $y(t)$.
Zur Kontrolle: $x(t) = (\alpha t + a)\cos\omega t \;+\; (\beta t + b)\sin\omega t$.

(c) Oder einfacher: Setze $z := x + iy$, fasse die beiden DGl in (1) in eine komplexe DGL zusammen und löse diese.

Hinweise

- **Zentralübung:** Do 15:15 - 16 Uhr in MW 0001
- **Tutorübungen:**

Fr.	10:15 - 11:45	in MW 1050, MW 2050, MW 1450
Fr.	12:15 - 13:45	in MW 2050, MW 0350
Mo.	08:30 - 10:00	in MW 1050
Di.	12:15 - 13:45	in CH 21010 (Fischer-Hörsaal)

Akad. Dir. Dr. K.-D. Reinsch
Akad. Dir. H.-W. Kirstein
Zentrum Mathematik, TU München

SoSe 2002
2. Übung

Höhere Mathematik IV
(Elektrotechnik)

Zentralübung

1) Gegeben sei das autonome nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y + \frac{1}{2}\exp(x^2 - 1) \quad , \quad \dot{y} = x^2 + x\,.$$

a) Man bestimme die *kritischen Punkte* (Gleichgewichtspunkte) und klassifiziere sie mittels linearer Näherungen.

b) Man fertige eine qualitative Skizze der Bahnkurven an für

$$-1.5 \le x \le 0.5 \quad , \quad -1 \le y \le 0 \quad .$$

2) Man bestimme eine stetig differenzierbare Lösung $x(t)$, $t \ge 0$ des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \le t < 1 \\ 0 \text{ für } 1 \le t \end{cases} \quad , \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

und skizziere $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

Tutorübungen

1) Gegeben sei das autonome nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y\,(x + y - 1) \quad , \quad \dot{y} = x\,(1 - x - y)\,.$$

a) Man bestimme die *kritischen Punkte* (Gleichgewichtspunkte) und klassifiziere sie mittels linearer Näherungen.

b) Man löse die Differentialgleichung 1. Ordnung für die (x, y)-Bahnen.

c) Man skizziere die (x, y)-Bahnen. (Phasendiagramm)

2) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,\dot{x}(t) + 2\,x(t) = \begin{cases} 5\sin t \text{ für } t \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ für } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Man bestimme ihre allgemeine, auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Lösung

b) Man bestimme die auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Lösung der Anfangswertaufgabe mit $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Hausaufgaben

1) Für das autonome nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = x + y + 2 \quad , \quad \dot{y} = y - x^2 + 4$$

berechne man die Gleichgewichtspunkte und bestimme mittels linearer Näherungen qualitativ den Verlauf der Lösung in der Nähe dieser Punkte und skizziere die (x, y)-Bahnen. (Phasendiagramm)

2) Der *Herzschlag des Menschen* genügt den folgenden (autonomen) Differentialgleichungen (vereinfachtes Modell):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k\,F(x,y) \quad , & F(x,y) &= x^3 - b\,x + y \\ \dot{y} &= G(x,y) \quad , & G(x,y) &= x - x_0 \end{aligned}$$

$x(t)$	:	Länge einer Herzmuskelfaser (+ einer Konstanten); $x(t)$ beschreibt den Herzschlag, x_0 ist die Länge des Herzmuskels im Ruhestand (*Diastole*).
$y(t)$	:	elektrochemischer Impuls (Steuergröße).
b	:	Blutdruck (vereinfacht als konstant angenommene Steuergröße).

Es sei $b = 1$, $x_0 = 1.1$, $k = 100$.

a) Durch $F(x, y) = 0$ ist in der (x, y)-Ebene eine Kurve K definiert. Man zeichne den Graphen von K.

b) Man ermittle den kritischen Punkt des Systems.

c) Man diskutiere das qualitative Verhalten der Bahnkurven in der Umgebung des kritischen Punkts.

3) (ehemalige DVP-Aufgabe)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,\dot{x}(t) + 5\,x(t) = \begin{cases} 10\cos t \text{ für } t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ für } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Man bestimme ihre allgemeine, auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Lösung.

b) Man bestimme die auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Lösung der Anfangswertaufgabe mit $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.

Abgabe:

Montag, 06.05.2002 bis 15.00 Uhr in dem entsprechend gekennzeichneten Briefkasten an der Garderobe westlich von Hörsaal S 0320

Akad. Dir. Dr. K.-D. Reinsch
Akad. Dir. H.-W. Kirstein
Zentrum Mathematik, TU München

SoSe 2002
3. Übung

Höhere Mathematik IV
(Elektrotechnik)

Zentralübung

1) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x\,(x^2+y^2-1)\,, \\ \dot{y} &= +x + y\,(x^2+y^2-1)\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dieses System geht bei Transformation auf *Polarkoordinaten* über in

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r\,(r^2-1) \quad ,\, r \geq 0 \quad \text{(Bernoulli-Differentialgleichung)}\,, \\ \dot{\varphi} &= 1\,. \end{aligned}$$

b) Man integriere das transformierte System $\Big($bei Bernoulli-Differentialgleichung Substitution $r = \dfrac{1}{\sqrt{z}}\Big)$ und diskutiere das Verhalten für $t \longrightarrow \infty$.

2) Für die Differentialgleichung $y''(x) - \dfrac{x}{1+x^2}\,y'(x) = x \quad (-\infty < x < \infty)$ sind folgende Randbedingungen vorgegeben:

$$y(0) + \beta\,y'(0) = \gamma \quad , \quad y(0) + y'(1) = 2\,.$$

Für welche Werte von β und γ hat die Randwertaufgabe

a) keine; b) genau eine; c) unendlich viele

Lösungen, und wie lauten diese im Falle der Existenz.

Tutorübungen

1) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\big(1-(x^2+y^2)\big)\,, \\ \dot{y} &= +x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\big(1-(x^2+y^2)\big)\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dieses System geht bei Transformation auf *Polarkoordinaten* über in

$$\dot{r} = 1 - r^2 \quad ,\, r > 0 \quad ; \quad \dot{\varphi} = 1\,.$$

b) Man integriere das transformierte System und diskutiere das Verhalten für $t \longrightarrow \infty$.

2) Man bestimme die Lösung des linearen Randwertproblems

$$y'' - y' - 2\,y = 0 \quad , \quad y(0) + y'(0) = 1\,,\; y(1) = 0$$

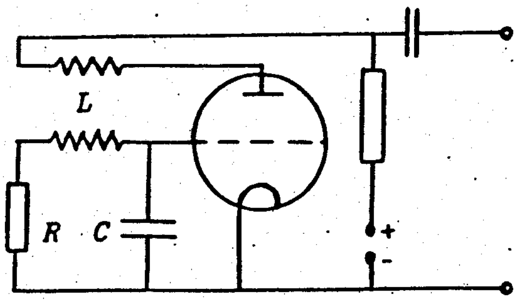
und formuliere das Randwertproblem in der Standardform (siehe Vorlesung).

3) Man bestimme Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe

$$(x\,y')' + \frac{\lambda}{x}\,y = 0 \quad , \quad y'(1) = y'\left(\mathrm{e}^{2\pi}\right) = 0\,.$$

Hausaufgaben

1) Die Gitterspannung $U(t)$ der Oszillatorröhre eines selbsterregten Röhrengenerators genügt der Differentialgleichung



$$L\,C\,\ddot{U} + R\,C\,\dot{U} + U = S\,C\,\dot{U}\,\exp\left(-U^2\right) \quad (1)$$

mit positiven Konstanten L, C, R, S.

Man berechne die Oszillatorfrequenz $\omega = 2\pi\,\nu$ und untersuche das qualitative Verhalten von $U(t)$ beim Einschalten des Senders wie folgt:

a) Man setze $U(t) = A(t)\,\cos\omega\,t$ und berechne $\dot{U}$ bzw. $\ddot{U}$. Für den technisch interessanten Fall ist es gestattet, bei $\dot{U}$ das Glied mit $\dot{A}$ und bei $\ddot{U}$ das Glied mit $\ddot{A}$ zu vernachlässigen. Mit diesen Ausdrücken für U, $\dot{U}$, $\ddot{U}$ gehe man in (1) ein $\Big($ hierbei ist es zulässig, $\exp\left(-U^2\right)$ durch die Näherung $1 - \dfrac{A^2}{2}$ zu ersetzen $\Big)$ und zeige, daß wegen der linearen Unabhängigkeit von $\sin\omega\,t$ und $\cos\omega\,t$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

sein muß, und daß $A(t)$ der folgenden Bernoulli-Differentialgleichung genügt

$$\dot{A} = \frac{S-R}{2\,L}\,A - \frac{S}{4\,L}\,A^3\,.$$

b) Mit der Substitution $A = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$ bestimme man die Lösung $A(t)$ mit $A(0) = A_0 > 0$.

c) Man bestimme $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)$ und unterscheide die Fälle $S < R$, $S = R$, $S > R$. Wie groß muß S gewählt werden, damit der Sender stabil schwingt?

2) Man forme (1) aus Hausaufgabe 1 um in ein Dgl.-System 1. Ordnung, ermittle eventuelle kritische Punkte, untersuche diese auf Stabilität und vergleiche das Resultat mit 1c).

3) Es sind folgende Eigenwertaufgaben zu lösen

a) $y''(x) + \lambda^2\,y(x) = 0 \quad (\lambda > 0)\,, \quad y(0) = 0\,,\; y(\pi) + \dfrac{1}{\lambda}\,y'(0) = 0$

b) $y''(x) - \lambda^2\,y(x) = 0 \quad (\lambda > 0)\,, \quad y(0) = 0\,,\; y'(2) = 0$

Abgabe:
Montag, 13.05.2002 bis 15.00 Uhr in dem entsprechend gekennzeichneten Briefkasten an der Garderobe westlich von Hörsaal S 0320

Akad. Dir. Dr. K.-D. Reinsch
Akad. Dir. H.-W. Kirstein
Zentrum Mathematik, TU München

WS 2001/02
12. Übung

Höhere Mathematik III
(Elektrotechnik)

Zentralübung

1) Man berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 + 3 \\ y_2' &= y_1 + y_3 + 1 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - 1 \end{aligned}$$

und löse das zugehörige Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung

$$y_1(0) = 1\,,\; y_2(0) = 0\,,\; y_3(0) = 1\,.$$

2) Man wandle die (homogene) Differentialgleichung 4. Ordnung

$$D[y] := y^{(4)} - 4\,y''' + 10\,y'' - 12\,y' + 5\,y = 0$$

in ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung um und gebe ein Fundamentalsystem sowohl des Differentialgleichungssystems 1. Ordnung als auch von $D[y] = 0$ an.
Wie berechnet man die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $D[y] = f(x)$ für $f(x) = 1\,,\, x\,,\, \mathrm{e}^{-x}\,,\, x\,\mathrm{e}^{-x}\,,\, \mathrm{e}^{x}\cos x\,,\, \mathrm{e}^{x}\sin(2x)$?

Tutorübungen

1) Die zur Zeit t im Blutkreislauf befindliche Dosis $B(t)$ und die vom Magen absorbierte Dosis $D(t)$ eines Herzmedikaments mögen das Differentialgleichungssystem

$$\dot{D}(t) = -D(t) \quad , \quad \dot{B}(t) = D(t) - \frac{1}{10}\,B(t)$$

erfüllen.

a) Man berechne $D(t)\,,\, B(t)$ unter der Anfangsbedingung $D(0) = 1\,,\, B(0) = 0\,.$

b) Man skizziere den Verlauf von $B(t)$. Wann ist die Konzentration des medikaments im Blut maximal?

2) Man löse das Differentialgleichungssystem $\quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $t \longrightarrow \infty\,.$

3) Man führe die Differentialgleichung $y'' + 6\,y' + 13\,y = 0$ in ein System 1. Ordnung über und löse dieses.

4) Man löse $y'' + 6\,y' + 13\,y = f(x)$ für
a) $f(x) = 2\,x + 1\,,$ b) $f(x) = \cos(2x)\,.$
Mit welchem Ansatz findet man eine partikuläre Lösung, wenn $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\sin(2x)$ ist?

Hausaufgaben

1) Man berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\underline{\dot{x}} = A\,\underline{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Man finde eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\lambda = 2\,.$

2) Man löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= \quad -3\,y_1 + 4\,y_2 \\ y_2' &= -2\,y_1 + y_2 + 1 \end{aligned}$$

und löse das zugehörige Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung

$$y_1(0) = 1\,,\; y_2(0) = 0\,.$$

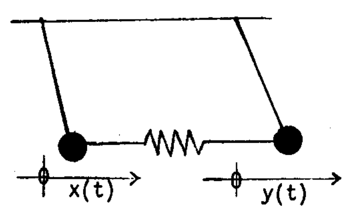
3) Man löse die Anfangswertprobleme

$$\begin{array}{rclr} y'' - y &=& x\,\sin x & y(1) = 1 \\ y'' - y &=& 3\,x + 1 & y(0) = 2 \\ y'' - y &=& \cosh x & y(0) = 0\,. \end{array}$$

4) Zwei Pendel der Masse 1 und der Länge 1 seien durch eine Feder gekoppelt. Dann gelten für die Elongationen $x(t)$ und $y(t)$ (vgl. Skizze) bei kleinen Ausschlägen die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g\,x - c\,(x - y) \\ \ddot{y} &= -g\,y - c\,(y - x) \end{aligned}$$

(g Erdbeschleunigung, c Federkonstante).



Man berechne die allgemeine Lösung $(x(t), y(t))$ durch Umwandlung der Bewegungsgleichungen in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung.

Abgabe:
Montag, 28.01.2002 bis 13.15 Uhr in einem der entsprechend gekennzeichneten Briefkästen an der Garderobe westlich von Hörsaal S 0320

Akad. Dir. Dr. K.-D. Reinsch
Akad. Dir. H.-W. Kirstein
Zentrum Mathematik, TU München

Höhere Mathematik III
(Elektrotechnik)

Zentralübung

1) Mittels *Variation der Konstanten* löse man

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + t \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

2) Man berechne alle Lösungen $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ von $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.
Ist das Anfangswertproblem

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \quad , \quad y(-1) = -1$$

eindeutig lösbar?

Tutorübungen

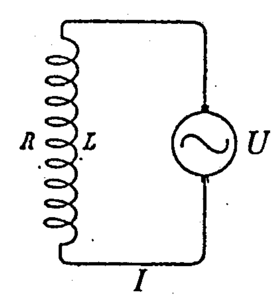
1) Man berechne eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung $y''+y = \mathrm{e}^x \sin x$

   a) mit dem Ansatz $y_p(x) = (a \sin x + b \cos x)\, \mathrm{e}^x$, $a, b \in \mathbb{R}$,
   b) mit dem Ansatz $y_p(x) = c \exp\big((1+\mathrm{i})\,x\big)$, $c \in \mathbb{C}$.

2) Man löse

$$y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}\,,\ x \in]0, \pi[\,, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

3) An den Enden einer zunächst stromlosen elektrischen Leitung mit konstantem Widerstand R [Ohm] und konstanter Selbstinduktion L [Henry] werde zur Zeit $t = 0$ eine von t abhängige Spannung $U = U(t)$ [Volt] angelegt. Dann gilt (ohne Berücksichtigung des Einschwingvorgangs) für die im Stromkreis zur Zeit $t \geq 0$ herrschende Stromstärke $I = I(t)$:



$$L\,\dot{I}(t) + R\,I(t) = U(t)\,,\ 0 \leq t\,.$$

Man berechne $I(t)$ für a) $U(t) = U_0$ (Gleichspannung),
b) $U(t) = U_0 \sin(\omega\, t)$ (Wechselspannung).

Hausaufgaben

1) Man löse

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}\,,\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\,, \qquad y(0) = 1\,,\, y'(0) = -1\,.$$

2) Ein Fallschirmspringer habe eine Fallgeschwindigkeit von $v = 35\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$ zur Zeit $t = 0\,[\mathrm{sec}]$, als sich sein Fallschirm öffnet. Der Luftwiderstand betrage $\frac{M\,g}{25}\,v^2$ (physikalische Dimension N = Newton) mit M = Masse des Springers einschließlich des Fallschirms und $g = 10\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\right]$.
Dann ergibt sich für $v(t)\,,\, t \geq 0\,,$ die trennbare Differentialgleichung

$$M\,\dot{v} = M\,g - \frac{M\,g}{25}\,v^2\,.$$

Man berechne $v(t)\,,\, t \geq 0\,,$ und bestimme $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)\,.$

Nach welcher Zeit hat der Fallschirmspringer eine Fallgeschwindigkeit von $v = 7\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$?

3) Man berechne die allgemeine Lösung $\underline{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ des homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underline{x}$ sowie die Lösungskurve, die $\underline{x}\,(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

4) Eine lineare Differentialgleichung $y'' + a_1\,y' + a_0 = f(x)$ habe (u.a.) die Lösungen $y_1(x) = 2\,x^2\,,\; y_2(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\,x^2\,,\; y_3(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\,x^2 + 3\,.$

Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung sowie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 0\,,\; y'(0) = 1\,.$

(Hinweis: Was weiß man über die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Dgl.?)

Abgabe:
Montag, 04.02.2002 bis 13.15 Uhr in einem der entsprechend gekennzeichneten Briefkästen an der Garderobe westlich von Hörsaal S 0320

Akad. Dir. Dr. K.-D. Reinsch
Akad. Dir. H.-W. Kirstein
Zentrum Mathematik, TU München

Höhere Mathematik III

(Elektrotechnik)

Zentralübung

1) Man löse

   a) $x^2\, y'' - 5\, x\, y' + 9\, y = x^2 \ln x \quad (x > 0)$,

   b) $x^2\, y'' + 5\, x\, y' - 12\, y = 0$.

2) Man löse das AWP $y' = y \tanh x + \sinh x$, $y(0) = 2$.

3) Man berechne die Lösungen von $y' = \dfrac{y+x}{y-x}$.

   Welche Lösungskurve verläuft durch $(x_0, y_0) = (0, 2)$, welche durch $(x_0, y_0) = (2, 0)$?

Tutorübungen

1) Man berechne die allg. Lösung von $x^3\, y''' - 3\, x^2\, y'' + 6\, x\, y' - 6\, y = x^4 \ln x \quad (x > 0)$.

2) Man löse das AWP $y' + 2\, x\, y = \dfrac{1 + 2\, x}{1 + x^2}\, \mathrm{e}^{-x^2}$, $y(0) = 1$.

3) Man löse mittels Potenzreihenansatz das AWP

$$\left(x^2 - 1\right)\, y'' + x\, y' - \frac{1}{4}\, y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Klausur

- Termin, Uhrzeit, Hörsäle findet man sobald bekannt unter Aktuelles

  http://www-hm.ma.tum.de/ei3/aktuelles.html

- Klausuranmeldung (per ePost) **nur für** Studierende mit **Hauptfach Informatik**

  Anmeldeschluß ist Dienstag, der 05.02.2002

Akad. Dir. Dr. K.-D. Reinsch
Akad. Dir. H.-W. Kirstein
Zentrum Mathematik, TU München

WS 2001/02
Klausur vom 14.02.02

Höhere Mathematik III

(Elektrotechnik/Informatik)

Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,e^y \sin(x) - \sin(2x) \\ 2\,e^{2y} - 2\,e^y \cos(x) \end{pmatrix}$.

a) Man zeige : $\underline{v}$ ist ein Gradientenfeld in $\mathbb{R}^2$.

b) Für das Vektorfeld $\underline{v}$ bestimme man den Wert des Kurvenintegrals längs des Bogens der Kurve $\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \pi\,t \\ \ln t \end{pmatrix}$, $t > 0$ von $(x,y) = (\pi, 0)$ bis $(x,y) = (2\pi, \ln(2))$.

Aufgabe 2

Gegeben seien das Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -3\,y \\ 3\,x + 2\,y \\ z^2 - 1 \end{pmatrix}$ und

der Zylinder $\mathcal{Z} = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 \le 1\,,\ -1 \le z \le 1 \right\}$.

Man berechne den Fluß des Vektorfeldes durch die Begrenzungsflächen des Zylinders $\mathcal{Z}$ (von innen nach außen)

a) durch direkte Berechnung der Oberflächenintegrale,

b) mit dem Satz von Gauß (als Volumenintegral über $\operatorname{div} \underline{v}$).

Aufgabe 3

Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + e^{2\,t} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$x^2\,y'' + x\,y' - y = \ln\frac{x}{2} \quad (x > 0)\,, \quad y(2) = 0\,,\ y'(2) = 0\,.$$

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Handschriftliches, Kopiertes, Gedrucktes und mechanische Rechenhilfen, wie z.B. Rechenschieber, aber **keine** elektronischen Geräte.