B. Lösungsskizzen zu den Übungsaufgaben

B.1. Lösungen zum Kapitel 1

B.1.1. Tutoraufgaben

Lösungsskizze 1 *Wir gehen zuerst nach dem Lösungsverfahren 1 vor.*

Schritt 1: Bestimmung der Lösung des homogenen DGL-Systems $\vec{y}_h' = \mathbf{A}\vec{y}_h$

1. *Wir bestimmen das charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = (-1-\lambda)^2(\lambda^2+1)$$

und die Eigenwerte aus $p(\lambda) = 0$ *und erhalten als Ergebnis:*

Eigenwert	*algebraische Vielfachheit*
$\lambda_{1,2} = -1$	2
$\lambda_3 = i$	1
$\lambda_4 = -i$	1

2. *Eigenräume/ Hauptvektoren/ Fundamentallösungen*

   - *zu* $\lambda_{1,2} = -1$*: aus* $\vec{0} = (\mathbf{A} - \lambda_{1,2}\mathbf{1})\vec{v}$ *folgt:* $\vec{v} = \sigma(1,0,0,0)^T = \sigma\vec{v}_1$ *und* $E(-1) = \langle\{\vec{v}_1\}\rangle$*. Da* $\dim E(-1) = 1 \neq 2 =$ *algebraische Vielfachheit* $\Rightarrow$ *es existiert einen zu* $\vec{v}_1$ *unabhängigen Hauptvektor* $\vec{h}_2$*, wegen* $\dim E(-1) = 1$ *lässt sich dieser aus der Gleichung*

   $$(A - \lambda_{1,2}\mathbf{1})\vec{h}_2 = \vec{v}_1$$

   bestimmen (siehe Lösungsverfahren 1 Schritt 2, Punkt 5). Man erhält $\vec{h}_2 = (0,1,0,0)^T$*. Damit lauten die Fundamentallösungen zum Eigenwert* -1*:*

   $$\vec{y}_1 = e^{-x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = e^{-x}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

   - *zu* $\lambda_3 = i$*: aus* $\vec{0} = (\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{1})\vec{v}$ *folgt:* $\vec{v} = \sigma(0,1,i,1)^T = \sigma\vec{v}_3$ *und* $E(i) = \langle\{\vec{v}_3\}\rangle$*. Da* $\dim E(i) = 1 =$ *algebraische Vielfachheit lautet die komplexe Fundamentallösung zum Eigenwert* i*:*

   $$\vec{z}_3 = e^{ix}\begin{pmatrix}0\\1\\i\\1\end{pmatrix}$$

- *zu $\lambda_4 = -i$ erhalten wir (nach Lösungsverfahren 1 Schritt 2, Punkt 3) unmittelbar*

$$\vec{z}_4 = e^{-ix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Somit lautet ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}_h' = \mathbf{A}\vec{y}_h$:*

$$\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, Re(\vec{z}_3), Im(\vec{z}_3)\} = \left\{\begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xe^{-x} \\ e^{-x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}\right\}$$

und die reelle Fundamental- bzw. Wronski-Matrix:

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Bestimmung einer Partikulären Lösung von

$$\vec{y}'(x) = \mathbf{A}\vec{y}(x) + \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \mathbf{A}\vec{y}(x) + \vec{b}$$

Ansatzmethode ist im allgemeinen immer schneller. Hier spalten wir die Inhomogenität $\vec{b}(x)$ auf und verwenden (1.7).

1. *Die partikuläre Lösung von*

$$\vec{y}_{p1}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}_{p1}(x) - 17\sin(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ermitteln wir mit Hilfe der Ansatzmethode (Lösungsverfahren 3). Da $2i$ kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist, können wir den Ansatz

$$\vec{z}_{p1}(x) = e^{2ix}\vec{w}, \qquad \vec{w} \in \mathbb{C}^4$$

verwenden und erhalten nach Einsetzen in

$$\vec{z}_{p1}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{z}_{p1}(x) - 17e^{2ix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Ergebnis: $\vec{w} = \frac{17}{15}(-3+6i, 5+10i, -5+10i, 5+10i)^T$ somit lautet die reelle partikuläre Lösung

$$\vec{y}_{p1}(x) = Im\left(\vec{z}_{p1}(x)\right) = \frac{17}{15}\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \sin(2x)\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

2. *Die partikuläre Lösung von*

$$\vec{y}_{p2}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}_{p2}(x) + xe^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen wir durch Variation der Konstanten. (Falls die Ansatzmethode verwendet wird, muss zusätzlich beachtet werden, dass -1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist!!!). Wir setzen

$$\vec{y}_{p2}(x) = \mathbf{W}(x)\vec{c}(x)$$

an und erhalten mit (Lösungsverfahren 2)

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \end{pmatrix} \vec{c}'(x) = xe^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \end{pmatrix} \vec{c}'(x) = xe^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nach Matrixinversion erhalten wir

$$\vec{c}'(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & -xe^{x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^{-x} \\ 0 \\ 0 \\ 2xe^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x\cos x e^{-x} \\ 2x \sin x e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c}(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ 0 \\ -e^{-x}(x\cos x - (x+1)\sin x) \\ -e^{-x}((x+1)\cos x + x\sin x) \end{pmatrix}$$

somit ist

$$\vec{y}_{p2}(x) = \mathbf{W}(x)\vec{c}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -x \\ -(x+1) \\ -x \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$\vec{y}(x) = \mathbf{W}(x)\vec{c} + \vec{y}_{p1}(x) + \vec{y}_{p2}(x) \qquad \vec{c} \in \mathbb{R}^4$$

Lösungsskizze 2

Wir setzen zuerst $u = y'$ und lösen die entstandene DGL 1. Ordnung

$$u'(x) - \frac{x}{1+x^2}u(x) = x$$

Die homogene DGL

$$u_h'(x) = \frac{x}{1+x^2}u_h(x)$$

ist trennbar, einfache Integration liefert die allgemeine Lösung

$$\int \frac{du_h}{u_h} = \int \frac{x}{1+x^2}dx \qquad \Rightarrow \qquad u_h(x) = C\sqrt{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ermitteln wir mittels Variation der Konstanten

$$u_p(x) = C(x)\sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+x^2}C'(x) = x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \sqrt{1+x^2}$$

als allgemeine Lösung für u erhalten wir somit

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Integration liefert somit

$$y(x) = \frac{C}{2}(x\sqrt{1+x^2} + Arsinh(x)) + D + x + \frac{x^3}{3}, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = C\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der RB

$$y(0) + \beta y'(0) = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad D + \beta(C+1) = \gamma$$

$$y(0) + y'(1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad D + C\sqrt{2} = 0$$

Subtraktion der 2. Gleichung von der ersten ergibt

$$c(\sqrt{2} - \beta) = \beta - \gamma$$

1. $\beta = \sqrt{2}$ *und* $\gamma \neq \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ *keine Lösung*
2. $\beta = \sqrt{2}$ *und* $\gamma = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ *C beliebig,* $D = -\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ *unendlich viele Lösungen*
3. $\beta \neq \sqrt{2}$ $\Rightarrow C = \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{2}-\beta}$ $\quad D = -\sqrt{2}\frac{\beta-\gamma}{\sqrt{2}-\beta}$ $\Rightarrow$ *eine eindeutige Lösung*

Lösungsskizze 3

a) GGL: $\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$ *oder* $x = \pm 2$

(i) $y = -1$ *in* $\dot{y} = 0$ *einsetzen liefert* $x = 0$ $\quad \vec{x}_1^* := (0, -1)^T$ *ist GGL*

(ii) $x = +2$ *in* $\dot{y} = 0$ *einsetzen liefert* $y = 1$ $\quad \vec{x}_2^* := (2, 1)^T$ *ist GGL*

(iii) $x = -2$ *in* $\dot{y} = 0$ *einsetzen liefert* $y = 1$ $\quad \vec{x}_3^* := (-2, 1)^T$ *ist GGL*

Sei

$$\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} (y+1)(4-x^2) \\ x(1-y) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -2x(y+1) & 4-x^2 \\ 1-y & -x \end{pmatrix}$$

(i) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Da* $\det \mathbf{J}_F(\vec{x}_1^*) = -8 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ *haben die EW unterschiedliche Vorzeichen* $\Rightarrow$ $\vec{x}_1^*$ *ist eine instabile GGL.*

(ii) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. *Da beide EW negativ* $\Rightarrow$ $\vec{x}_3^*$ *ist eine stabile GGL.*

(iii) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_3^*) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Da mindestens ein EW positiv* $\Rightarrow$ $\vec{x}_3^*$ *ist eine instabile GGL.*

b) Die Phasenbahn-DGL

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x(1-y)}{(y+1)(4-x^2)}$$

ist eine trennbare DGL. Für $y \neq 1$ gilt:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1+y'}{1-y'}dy' = \int_{x_0}^{x} \frac{x'}{4-x'^2}dx'$$

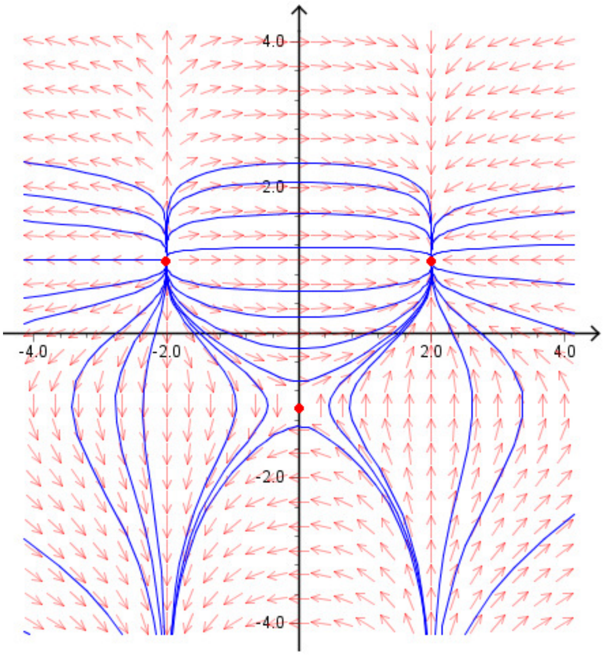
Integration liefert

$$-(y-y_0) + \ln\left(\frac{y_0-1}{y-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x_0^2-4}{x^2-4}\right|$$

welche die implizite Lösung der Phasenbahn-DGL ist.

c) Als Zeichenhilfe berechnen wir:

1. *Punkte, in denen die Phasenbahnen eine waagrechte Tangente haben sind gegeben durch* $\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ *oder* $y = 1$
2. *Punkte, in denen die Phasenbahnen eine senkrechte Tangente haben sind gegeben durch* $\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$ *oder* $y = -1$



B.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

Lösungsskizze 4

- *Ist $\vec{v}_1$ ein EV von $\mathbf{A}$? Wir setzen ein:*

$$\mathbf{A}\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1$$

  OK. d.h. $\vec{v}_1$ ist ein EV von $\mathbf{A}$ zum EW $\lambda_1 = 3$.

- *Ist $\vec{h}_{1,1}$ ein HV 2. Stufe von $\mathbf{A}$ zum EV $\vec{v}_1$? Wir setzen ein:*

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1})\vec{h}_{1,1} = \vec{v}_1$$

  OK.

- *Ist $\vec{h}_{1,2}$ ein HV 3. Stufe von $\mathbf{A}$ zum EV $\vec{v}_1$? Wir setzen ein:*

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1})\vec{h}_{1,2} = \vec{h}_{1,1}$$

  OK.

-

$$\mathbf{A}(\vec{v}_1, \vec{h}_{1,1}, \vec{h}_{1,2}) = (\mathbf{A}\vec{v}_1, \mathbf{A}\vec{h}_{1,1}, \mathbf{A}\vec{h}_{1,2}) =$$
$$= (\lambda_1\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \lambda_1\vec{h}_{1,1}, \vec{h}_{1,1} + \lambda_1\vec{h}_{1,2}) = (\vec{v}_1, \vec{h}_{1,1}, \vec{h}_{1,2}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

- *Allgemeine Lsg. von $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$*

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}(\vec{h}_{1,1} + t\vec{v}_1) + c_3 e^{\lambda_1 t}\left(\vec{h}_{1,2} + t\vec{h}_{1,1} + \frac{t^2}{2}\vec{v}_1\right)$$

Lösungsskizze 5
Wir lösen die Aufgabe nach dem allgemeinen Prinzip für lineare DGL Systeme (allerdings liegt hier ein System mit variabler Systemmatrix vor!)

$$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$$

und bestimmen zuerst die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \vec{x}_h(t) \quad \vec{x}_h = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Die 2. Zeile ist von der ersten entkoppelt und ergibt

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{t}\eta(t) \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = Ct, \quad C \in \mathbb{R}$$

Eingesetzt in die erste Zeile erhalten wir die lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\dot{\xi}(t) = \xi(t) + Ct$$

Lösung der homogenen DGL:

$$\dot{\xi}_h(t) = \xi_h(t) \quad \Rightarrow \quad \xi_h(t) = De^t$$

Lösung der inhomogenen DGL mit Störgliedansatz $\xi_p(t) = (Et + F)e^{0t}$ liefert nach Einsetzen

$$E = Et + F + Ct$$

Koeffizientenvergleich (Potenzen von t) liefert $E = -C$ und $F = E = -C$ und somit

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} De^t - C(1+t) \\ Ct \end{pmatrix}, \quad C, D \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & -(1+t) \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Für die partikuläre Lösung den inhomogenen Systems kann man im Falle von Systemen mit variabler

Systemmatrix im allgemeinen keinen Störgliedansatz machen (hier eventuell schon). Wir suchen eine partikuläre Lösung den inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten. Dazu setzen wir

$$\vec{x}_p(t) = \mathbf{W}(t)\vec{c}(t)$$

und lösen (mit $\vec{b} = (-2,0)^T$)

$$\mathbf{W}(t)\dot{\vec{c}}(t) = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{c}}(t) = \frac{1}{te^t}\begin{pmatrix} t & (1+t) \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Integration liefert

$$\vec{c}(t) = 2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & -(1+t) \\ 0 & t \end{pmatrix} 2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist somit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & -(1+t) \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Wir bestimmen noch die Lösung des Anfangswertproblems: Durch einsetzen von $\vec{x}(1) = (0,1)^T$ erhalten wir $D = 0$ und $C = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -(t+1) \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsskizze 6

Wir wandeln die homogenen lineare DGL 3. Ordnung in ein System von DGL 1. Ordnung um, indem wir 3 Hilfsfunktionen einführen:

$$y_1 = y \quad y_2 = y' \quad y_3 = y''$$

Wir erhalten das System

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\vec{y}(x)$$

Nun EW und EV aus $0 = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$. Die EW $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$ sind paarweise verschieden, d.h. die Systemmatrix ist diagonalisierbar. Die zugehörige EV sind:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d.h. ein Fundamentalsystem für das DGL-System ist somit

$$\left\{ e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

das Fundamentalsystem für die DGL 3. Ordnung ist

$$\left\{ e^{-x}, e^{x}, e^{2x} \right\}$$

Lösungsskizze 7

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\lambda x + D$$

mit der Ableitung

$$w'(x) = -\lambda A\sin(\lambda x) + \lambda B\cos(\lambda x) + C\lambda$$

Aus der Geometrie (keine vertikale Verschiebung und keine Neigung an den Enden) erhalten wir als Randbedingungen:

$$w(0) = w(L) = 0 \qquad \textit{und} \qquad w'(0) = w'(L) = 0$$

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -A$$

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -B$$

Eingesetzt in die restlichen Randbedingungen erhalten wir folgende Gleichungen

$$\begin{pmatrix} w(L) \\ w'(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos(\lambda L) - 1 & \sin(\lambda L) - \lambda L \\ -\sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die obige Gleichung besitzt nur dann Lösungen $A \neq 0 \neq B$, wenn

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\lambda L) - 1 & \sin(\lambda L) - \lambda L \\ -\sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dies liefert

$$2 - 2\cos(\lambda L) = \lambda L \sin(\lambda L) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)\left[4\sin\left(\frac{1}{2}\lambda L\right) - \lambda L\cos\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)\right] = 0$$

Sei $x = \frac{\lambda L}{2}$. Nun müssen die Nullstellen von

$$\sin x \qquad \textit{und} \qquad 2\tan(x) - x$$

verglichen werden. Während die kleineste positive Nullstelle von $\sin x$ durch π gegeben ist, ist die kleinste positive Nullstelle von $2\tan(x) - x > \pi$. Also ist $\lambda^* = \frac{2\pi}{L}$ der kleinste Eigenwert und wir erhalten für die kritische Kraft:

$$F_{krit} = \lambda^2 EI = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Lösungsskizze 8

Die DGL lässt sich zu einer linearen DGL mit variablen Koeffizienten umformen

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

Wir verwenden die angegebene Substitution

$$z(t) = y(x) = y(e^t) \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = y'(x)x \quad \ddot{z}(t) = y''(x)x^2 + y'(x)x$$

und erhalten somit eine linear DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$(\ddot{z}(t) - \dot{z}(t)) + \dot{z}(t) + \lambda z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{z}(t) + \lambda z(t) = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom:

$$P(\mu) = \mu^2 + \lambda$$

1. $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} =: \pm\mu \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z(t) = c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \sinh(\mu t)$
2. $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = 0$ *doppelte NST* $\quad \Rightarrow \quad z(t) = c_1 + c_2 t$
3. $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} =: \pm im \in i\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z(t) = c_1 \cos(mt) + c_2 \sin(mt)$

Rücksubstitution

1. $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} =: \pm\mu \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 \cosh(\mu \ln x) + c_2 \sinh(\mu \ln x)$
2. $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = 0$ *doppelte NST* $\quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 + c_2 \ln x$
3. $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} =: \pm im \in i\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 \cos(m \ln x) + c_2 \sin(mt \ln x)$

Anpassen an Randbedingungen

1. $\lambda < 0 :$ $\quad y'(x) = [c_1 \sinh(\mu \ln x) + c_2 \cosh(\mu \ln x)] \frac{\mu}{x}$. *Mit* $y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ *und dann* $y'(e^{2\pi}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ *erhalten wir nur die triviale Lösung* $y \equiv 0$.
2. $\lambda = 0 :$ $\quad y'(x) = \frac{c_2}{x}$. *Mit* $y'(e^{2\pi}) = 0 = y'(1) \Rightarrow c_2 = 0$. *Aber* c_1 *ist frei wählbar. Alle konstanten Funktionen sind Eigenfunktionen zum Eigenwert* $\lambda = 0$.
3. $\lambda > 0 :$ $\quad y'(x) = [-c_1 \sin(m \ln x) + c_2 \cos(m \ln x)] \frac{\mu}{x}$. *Mit* $y'(1) = 0$ *folgt* $c_2 = 0$. *Für die Bedingung* $y'(e^{2\pi}) = 0$ *erhalten wir die Bedingungsgleichung für* $m = \sqrt{\lambda}$*:*

   $$\sin(2\pi m) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

   Damit erhalten wir nur dann nichttriviale ($c_1 \neq 0$) *Lösungen, wenn* $\lambda = k^2/4$ *mit* $k \in \mathbb{N}$. *Diese lauten*

   $$y_k(x) = a \cos\left(\frac{k}{2} \ln x\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

Lösungsskizze 9

a) GGL: $\dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ *oder* $x = 1$

(i) $y = 0$ *in* $\dot{x} = 0$ *einsetzen liefert* $x = 0$ $\qquad \vec{x}_1^* := (0,0)^T$ *ist GGL*

(ii) $x = 1$ *in* $\dot{x} = 0$ *einsetzen liefert* $y = \pm 1$ $\qquad \vec{x}_2^* := (1,1)^T$

(iii) und $\vec{x}_3^* := (1,-1)^T$ *sind GGL*

Sei

$$\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} (y^2-1)x \\ (x-1)y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} y-1 & 2xy \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

(i) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Da beide EW negativ* $\Rightarrow \quad \vec{x}_1^*$ *ist eine stabile GGL*

(ii) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. *Da mindestens ein EW positiv* $\Rightarrow$ $\vec{x}_2^*$ *ist eine instabile GGL. (Hier Sattelpunkt)*

(iii) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_3^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. *Da mindestens ein EW positiv* $\Rightarrow$ $\vec{x}_3^*$ *ist eine instabile GGL. (Hier Sattelpunkt)*

b) Die Phasenbahn-DGL

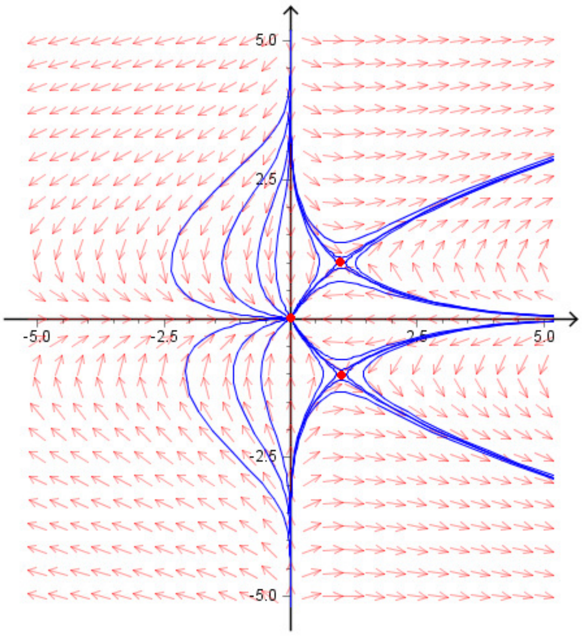
$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(x-1)y}{(y^2-1)x}$$

ist eine trennbare DGL.

$$\left(y - \frac{1}{y}\right) y' = 1 - \frac{1}{x}$$

Integration liefert die implizite Lösung

$$x_0 y = x y_0 e^{\frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) - (x - x_0)}$$



Lösungsskizze 10

a) GGL: $\dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ *oder* $x = 1$

(i) $y = 0$ *in* $\dot{x} = 0$ *einsetzen liefert* $x = 0$ $\quad \vec{x}_1^* := (0,0)^T$ *ist GGL*

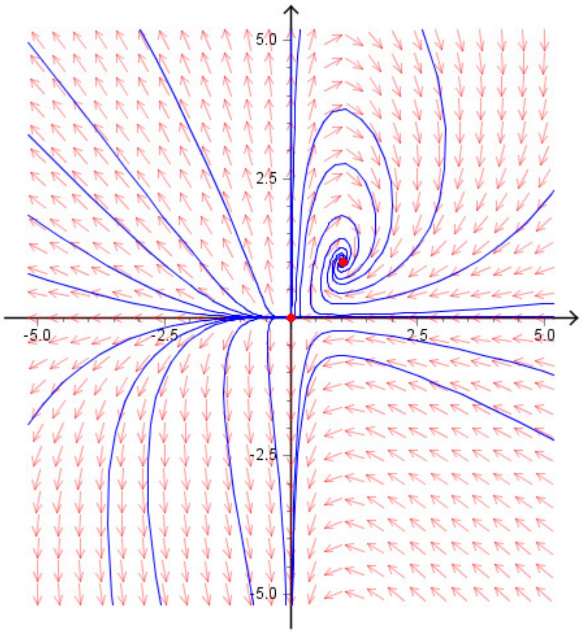
(ii) $x = 1$ *in* $\dot{x} = 0$ *einsetzen liefert* $y = 1$ $\quad \vec{x}_2^* := (1,1)^T$ *ist GGL*

Sei

$$\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} x(y-x) \\ 2y(1-x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} y - 2x & x \\ -2y & 2(1-x) \end{pmatrix}$$

(i) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Da mindestens ein EW positiv* $\Rightarrow$ $\vec{x}_1^*$ *ist eine instabile GGL*

(ii) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{7})$. *Da* $Re(\lambda_{1,2}) < 0 \Rightarrow$ $\vec{x}_2^*$ *ist ein asymptotisch stabiler Strudelpunkt.*



Lösungsskizze 11

a) GGL: $\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$ *Einsetzen in* $\dot{y} = 0$ *liefert* $y = 0$. *Wir erhalten 2 GGL:*

(i) $\vec{x}_1^* := (1, 0)^T$

(ii) $\vec{x}_2^* := (-1, 0)^T$

Sei

$$\vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} xz \\ 1 - x^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2} \quad \Rightarrow$ *Zentrum*

(ii) $\mathbf{J}_F(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2} \quad \Rightarrow$ *Zentrum*

b) Die Phasenbahn-DGL ist trennbar

$$y'(x) = \frac{-x^2 + 1}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad 2yy'(x) = -2x + \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - y_0^2 = -(x^2 - x_0^2) + 2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Nach einer Umformung erhalten wir

$$x = x_0 e^{\frac{1}{2}\left(y^2 + x^2 - x_0^2 - y_0^2\right)}$$

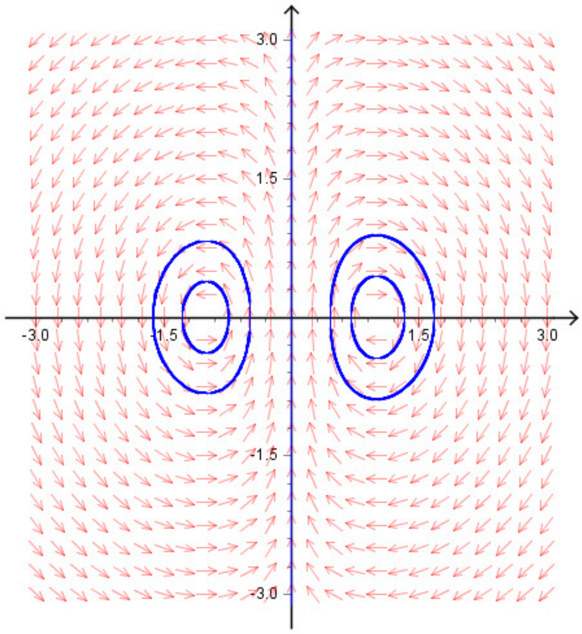
d.h. die Bahn durch $(x_0, y_0)^T = (0, r)^T$ *mit* $r \in \mathbb{R}$ *beliebig ist eine Gerade (die Gerade* $x = 0$*).*

c) Für den Anfangswert $\vec{x}(0) = (0, -2)^T$ *ist die Phasenbahn die Gerade* $x = 0$. *Setzt man dies in die DGL ein, so erhält man ein einfaches Anfangswertproblem:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = (0, -2)^T$$

mit der Lösung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t - 2 \end{pmatrix}$$


3.0
1.5
-3.0
-1.5
1.5
3.0
-1.5
-3.0