A. Übungsaufgaben

A.1. Aufgaben zum Kapitel 1

A.1.1. Tutoraufgaben

Aufgabe 1 (Lineares Differentialgleichungssystem) *(RR'05) Man berechne die allgemeine Lösung des DGL-Systems*

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(x) - 17\sin(2x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + xe^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (Randwertproblem) *(RR'06) Für die Differentialgleichung*

$$y"(x) - \frac{x}{1+x^2} y'(x) = x \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

sind folgende Randbedingungen vorgegeben:

$$y(0) + \beta y'(0) = \gamma \qquad y(0) + y'(1) = 2$$

Für welche Werte von β und γ hat die Randwertaufgabe

a) keine

b) genau eine

c) unendlich viele

Lösungen? Wie lauten diese im Falle der Existenz?

Aufgabe 3 (Stabilität autonomer DGL-Systeme) *(R04) Gegeben sei das DGL-System*

$$\dot{x} = (y+1)(4-x^2)$$

$$\dot{y} = x(1-y)$$

a) Man bestimme Lage und Art der Gleichgewichtslagen (GGL) in linearer Näherung.

b) Man gebe eine Phasenbahn-DGL an und löse sie.

c) Im x, y,-Koordinatensystem skizziere man die GGL und einige Phasenbahnen.

A.1.2. Aufgaben zum eigenständigen Üben

Aufgabe 4 (DGL-System) *(RR'05) Gegeben sei die Systemmatrix*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *Man überprüfe, dass $\vec{v}_1 = (-1,1,1)^T$ ein Eigenvektor (Hauptvektor 1. Stufe) von $\mathbf{A}$ ist und $\vec{h}_{1,1} = (1,0,0)^T$ bzw. $\vec{h}_{1,2} = (1,-1,0)^T$ Hauptvektoren von $\mathbf{A}$ (zu $\vec{v}_1$) 2. bzw. 3. Stufe sind.*

b) *Berechnen Sie für $\mathbf{T} = (\vec{v}_1, \vec{h}_{1,1}, \vec{h}_{1,2})$: $\mathbf{AT}$ und $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$*

c) *man bestimme die allgemeine Lösung von $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$.*

Aufgabe 5 (DGL-System) *(RR'05) Man bestimme für $t \geq 1$ die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (DGL-n-ter Ordnung) *(RR'05) Man wandle die homogene*

Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\mathcal{D}[y] := y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

in ein lineares DGL-System 1. Ordnung um und gebe ein Fundamentalsystem sowohl des DGL-Systems 1. Ordnung als auch von $\mathcal{D}[y] = 0$ an.

Aufgabe 7 (Randeigenwertproblem: Eulersche Knicklast (4. Fall)) *(Modifikation RR'06) Die Biegelinie $w(x)$ eines Stabes der Länge L mit konstanter Biegesteifigkeit EI erfüllt bei Druckbeanspruchung mit der Kraft F in Stabrichtung in der linearen Theorie die Differentialgleichung:*

$$w^{(4)}(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \qquad x \in [0, L] \qquad \lambda^2 := \frac{F}{EI}$$

Bestimmen Sie für den Stab mit der in Abb. A.1 dargestellten Lagerung die minimale Kraft F_{krit}, die

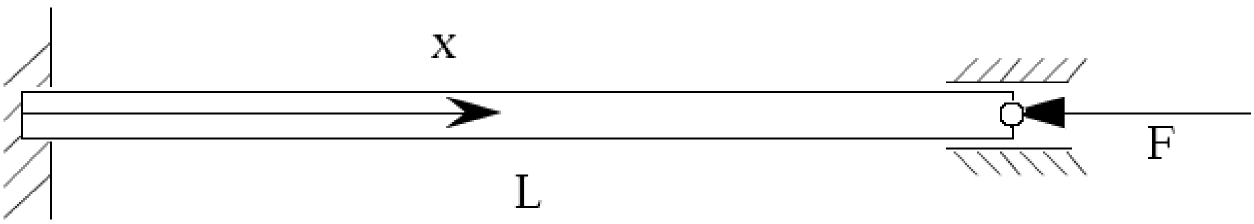

Abbildung A.1.: 4. EULER-Fall

für das Einnehmen einer von der Waagrechten verschiedenen Gleichgewichtslage erforderlich ist.

Aufgabe 8 (Eigenwertproblem) *(RR'06) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. (Hinweis: Substitution $x = e^t$, $z(t) = y(x)$)*

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0 \qquad y'(1) = 0 = y'(e^{2\pi})$$

Aufgabe 9 (Stabilität autonomer DGL-Systeme) *(R04) Gegeben sei das DGL-System*

$$\dot{x} = (y^2 - 1)x$$

$$\dot{y} = (x - 1)y$$

a) *Man bestimme Lage und Art der Gleichgewichtslagen (GGL) in linearer Näherung.*

b) *Man gebe eine Phasenbahn-DGL an und löse sie.*

c) *Im $x, y,$-Koordinatensystem skizziere man die GGL und einige Phasenbahnen.*

Aufgabe 10 (Stabilität autonomer DGL-Systeme) *(RR'06) Gegeben ist das System von Differentialgleichungen*

$$\dot{x} = x(y - x)$$

$$\dot{y} = 2y(1 - x)$$

a) *Man bestimme Lage und Art der Gleichgewichtslagen (GGL) in linearer Näherung.*

b) *Im $x, y,$-Koordinatensystem skizziere man die GGL und einige Phasenbahnen.*

Aufgabe 11 (Stabilität autonomer DGL-Systeme) *(RR'06) Gegeben ist das automome DGL-System*

$$\dot{x} = xy$$

$$\dot{y} = 1 - x^2$$

a) *Bestimmen Sie alle stationären Lösungen. Was lässt sich durch lineare Näherung für deren Stabilität folgern?*

b) *Berechnen Sie das Phasenportrait aller Lösungsbahnen. Welche davon ist eine Gerade?*

c) *Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswert $(0, -2)^T$.*